Р.Годеман

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ПУЧКОВ

Издательство иностранной литературы. Москва 1961

В монографии Р.Годемана дается единственное в мировой литературе систематическое изложение новой области современной топологии — теории пучков. Эта теория, разработанная в самое последнее время, является мощным аппаратом исследования в различных областях современной алгебры, геометрии и анализа.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Среди идей, имеющих сейчас хождение в математических кругах, идея создания монографии, посвященной теории пучков, является, несомненно, одной из наименее оригинальных: большинство специалистов имело в разное время намерение осуществить ее, и даже известно несколько публикаций, в большинстве своем отпечатанных на ротаторе (как будто это нелегальная литература!), которые посвящены этому вопросу. Самые известные из них принадлежат А. Картану. Но мы напрасно искали бы полное изложение, содержащее подробные доказательства всех теорем. Поскольку аппарат теории пучков проникает в самые разнообразные разделы математики, подобное положение не может быть более терпимо лицами, применяющими эту теорию. Вот почему специалист по функциональному анализу предлагает, наконец, полное, точнее, менее неполное по сравнению с другими, изложение теории пучков — with a vengeance!

Очевидно, что подобная книга была бы совершенно бесполезной, если бы она адресовалась только к специалистам по теории пучков или даже, учитывая наличие внетопологических приложений, если бы она предполагала у читателя знание классической техники алгебраической топологии. Поэтому мы стремились написать книгу, не требующую *никакого* знания алгебраической топологии, и были вынуждены поместить перед изложением собственно теории пучков главу, посвященную гомологической алгебре.

Мы надеемся, что эта глава будет полезна для некоторых категорий читателей. В ней, кроме обычных сведений относительно точных последовательностей, функторов, комплексов и т. д., рассматриваются следующие три важных вопроса: теория спектральных последовательностей (§ 4), теория функторов Ext и Tor (§ 5) и теория симплициальных комплексов (§ 3). Наше изложение теории спектральных последовательностей и функторов Ext и Tor значительно короче и менее полно, чем изложение А. Картана и С. Эйленберга в их недавно вышедшей книге[1]). Что касается „симплициальных комплексов“, то здесь имеются в виду цепные (или коцепные) комплексы, в которых определены „операторы граней“, позволяющие формально производить классические вычисления с симплексами. Такие комплексы

[1]) См. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960. — *Прим. перев.*

встречаются не только в классической теории полиэдров, но также в сингулярных гомологиях, гомологиях Чеха[1]) и в теории пучков. Более того, как показывают недавние работы Кана, они, по-видимому, образуют естественную область, в которой имеет место содержательная теория гомотопии. Можно утверждать, что общее понятие „симплициального комплекса“ (принадлежащее главным образом Эйленбергу и Зильберу) призвано играть важную роль в алгебраической топологии. В § 3 содержится, в частности, более или менее полное изложение теории произведений (декартовы произведения и $\smile$-произведения) — изложение, единственная оригинальность которого состоит, без сомнения, только в том, что оно напечатано. Мы не сочли возможным включить в этот параграф теорию операций Стинрода. Ее можно будет найти во втором томе этого труда, когда в нашем распоряжении будет необходимый аппарат (когомологии групп, пространства с группами операторов, сингулярные гомологии и т. д.).

Собственно теория пучков занимает вторую половину этой книги. Для удобства читателей, знакомых с имеющимися изложениями теории пучков, мы дадим сейчас некоторые указания относительно применяемых нами методов ввиду того, что они значительно отличаются от уже известных и являются более сильными.

После двух параграфов, содержащих общие сведения о пучках множеств и пучках модулей, мы занимаемся в § 3 центральной проблемой теории пучков, а именно проблемой „продолжения“ и „подъема“ сечений в пучках. С точки зрения этой проблемы кажется существенным, благодаря своей простоте и полезности, понятие *вялого* пучка. Пучок $\mathcal{F}$ над пространством X называется вялым, если всякое сечение пучка $\mathcal{F}$ над *открытым* множеством из X можно продолжить до сечения над всем X. Всякий пучок $\mathcal{F}$ можно вложить в вялый пучок (например, в пучок ростков всех, не обязательно непрерывных, сечений пучка $\mathcal{F}$), и если имеется точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \ldots$$

вялых пучков абелевых групп, то *сечения* этих пучков над каким-нибудь открытым множеством снова образуют точную последовательность. Для паракомпактных пространств важно также иметь более слабое понятие *мягкого* пучка. Пучок $\mathcal{F}$ называется мягким, если всякое сечение $\mathcal{F}$ над *замкнутым* множеством продолжается на все пространство. Это понятие, по-видимому, должно с успехом заменить понятие *тонкого* пучка, которое играло важную роль в прежней теории. Если имеется точная последовательность мягких пучков абелевых групп над паракомпактным пространством, то сечения этих

[1]) Правильнее называть их гомологиями Александрова — Чеха. В нашей литературе применяют также термин „спектральные гомологии“. — *Прим, перев.*

пучков над замкнутым множеством также образуют точную последовательность.

В § 4 для всякого пространства X (не обязательно отделимого) и для всякого пучка $\mathcal{A}$ абелевых групп над X определяются группы $H^n(X; \mathcal{A})$ и доказываются их основные свойства. Имеем прежде всего

$$H^0(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A}),$$

где $\Gamma(\mathcal{A})$ — группа глобальных сечений пучка $\mathcal{A}$. Каждой точной последовательности

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

соответствует точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^n(X; \mathcal{A}') \to H^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A}'') \to H^{n+1}(X; \mathcal{A}') \to \ldots.$$

Наконец, имеем

$$H^n(X; \mathcal{A}) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1,$$

если $\mathcal{A}$ — вялый пучок (или если X паракомпактно, а $\mathcal{A}$ — мягкий пучок). Возможность определения групп когомологий, обладающих этими свойствами, *без всяких предположений относительно* X была впервые показана Гротендиком в 1955 г., который основывался на том, что всякий пучок можно погрузить в *инъективный* (в смысле гомологической алгебры). Поскольку эти исследования Гротендика будут опубликованы в ближайшее время[1]), мы предпочли вместо инъективных пучков использовать вялые пучки, которые, очевидно, особенно удобны для изучения функтора $\mathcal{A} \to \Gamma(\mathcal{A})$. Оказывается, что для любого пучка $\mathcal{A}$ можно построить каноническим образом *вялую резольвенту*

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \to \ldots,$$

являющуюся „точным" функтором по отношению к $\mathcal{A}$. Полагая

$$C^*(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})), \quad H^n(X; \mathcal{A}) = H^n(C^*(X; \mathcal{A})),$$

мы получаем, совершенно элементарным способом, три основных свойства групп когомологий.

Параграф 4 содержит также доказательства (использующие спектральные последовательности) знаменитых „основных теорем". В частности, доказывается, что всякая резольвента

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \ldots$$

пучка $\mathcal{A}$ порождает канонические гомоморфизмы

$$H^n(\Gamma(\mathcal{L}^*)) \to H^n(X; \mathcal{A}),$$

которые являются изоморфизмами, если $\mathcal{L}^p$ — вялые пучки (или мягкие, в случае, когда X паракомпактно). Это показывает, что для определения групп $H^n(X; \mathcal{A})$ не обязательно выбирать „каноническую" вялую

[1]) См. Grothendieck A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9 (1957), 119—211 (имеется русский перевод: Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1961). — *Прим. перев.*

резольвенту пучка $\mathcal{A}$. Наконец, мы детально рассматриваем точную последовательность когомологий, связанную с замкнутым подпространством, а также различные дополнительные вопросы, а именно соотношения между когомологиями подпространства и когомологиями его окрестностей, когомологии со значениями в индуктивном пределе пучков, спектральную последовательность расслоенного пространства, когомологическую размерность.

В параграфе 5 изучаются соотношения между группами $H^n(X; \mathcal{A})$ и $\check{H}^n(X; \mathcal{A})$, полученными по методу Чеха (этот метод, как известно, дает удовлетворительные результаты только для паракомпактных пространств или же для специальных категорий пучков). Мы показываем прежде всего, что каждое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства X, которое либо открыто, либо замкнуто и локально конечно, определяет *резольвенту* $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ для всякого пучка $\mathcal{A}$ над X. Это приводит к каноническим гомоморфизмам $H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$, которые определяются с помощью некоторой спектральной последовательности. Переходя к пределу, мы получаем спектральную последовательность, связывающую когомологии Чеха с „хорошими“ когомологиями. Отсюда вытекает изоморфизм

$$\check{H}^n(X; \mathcal{A}) = H^n(X; \mathcal{A}),$$

справедливый, во-первых, для всякого пучка, если X паракомпактно, и, во-вторых, для любого X, когда для заданного пучка $\mathcal{A}$ найдется „достаточно много“ таких открытых в X множеств, что для всякого их конечного пересечения U имеем

$$\check{H}^n(U; \mathcal{A}) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1.$$

Этот последний результат, принадлежащий А. Картану, позволяет утверждать, что для когерентных алгебраических пучков, изучавшихся Серром, когомологии Чеха совпадают с „хорошими“ когомологиями. С другой стороны, мы смогли доказать без всяких предположений о пространстве X известный результат Лере, согласно которому для заданного покрытия $\mathfrak{M} = (M_i)$ пространства X, такого, что

$$H^n(M_{i_0} \cap \ldots \cap M_{i_p}; \mathcal{A}) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1,$$

гомоморфизмы

$$H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$$

являются изоморфизмами, когда $\mathfrak{M}$ либо *открыто*, либо *замкнуто и локально конечно*.

К сожалению, мы не смогли найти доказательства, которое было бы применимо одновременно к обоим этим случаям: в случае открытого покрытия $\mathfrak{M}$ нужно изучать двойной комплекс $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))$, а в случае замкнутого $\mathfrak{M}$ — двойной комплекс $C^*(X; \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$, где $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ — резольвента пучка $\mathcal{A}$, определенная посредством $\mathfrak{M}$.

В § 6 на пучки распространяются понятия декартова произведения и $\smile$-произведения. Легко проверить, что для заданных пучков $\mathcal{A}$

и $\mathscr{B}$ над произвольными пространствами X и Y тензорное произведение канонических резольвент $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ есть резольвента для тензорного произведения $\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}$ (символ $\widehat{\otimes}$ обозначает, что $\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}$ есть пучок с базой $X \times Y$). Это дает отображения

$$H^p(X;\ \mathscr{A}) \times H^q(Y;\ \mathscr{B}) \to H^{p+q}(X \times Y;\ \mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}),$$

обладающие всеми свойствами, которые мы вправе ожидать от декартова произведения когомологий. В случае $X = Y$, рассуждая аналогично или же используя декартово произведение и диагональное отображение, получаем $\cup$-произведение

$$H^p(X;\ \mathscr{A}) \times H^q(X;\ \mathscr{B}) \to H^{p+q}(X;\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}).$$

Отметим также одно существенное обстоятельство. Для *всякого* пучка $\mathscr{A}$ над пространством X существует вялая резольвента

$$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{F}^0(X;\ \mathscr{A}) \to \mathscr{F}^1(X;\ \mathscr{A}) \to \ldots,$$

которая является точным функтором по $\mathscr{A}$ и *дифференциал которой определяется некоторой полусимплициальной структурой* (т. е. операторами „граней“ и „вырождений“, формально аналогичными соответствующим операторам в теории полусимплициальных комплексов Эйленберга — Маклейна — Зильбера). Если использовать эту резольвенту для определения групп когомологий, то найдем, что явные формулы для $\cup$-произведения в теории пучков остаются теми же, что и в классической симплициальной теории[1]), а именно,

$$f \cup g(x_0,\ \ldots,\ x_{p+q}) = f(x_0,\ \ldots,\ x_p) \otimes g(x_p,\ \ldots,\ x_{p+q}).$$

Это замечание имеет не только чисто методическую ценность, показывая, что мультипликативная теория пучков является частным случаем общей теории „симплициальных“ комплексов; оно интересно также тем, что позволяет автоматически переносить в теорию пучков всякое понятие, основанное исключительно на существовании симплициальной структуры. В частности, становится ясным, что *в теории пучков можно определить операции Стинрода*, поскольку для их определения достаточно симплициальной структуры и диагонального отображения. Этот вопрос, как мы уже отметили выше, будет подробно изложен во II томе настоящего труда.

Наконец, § 7 содержит краткое изложение теории инъективных пучков, производных функторов и спектральной последовательности для функтора Ext, которая необходима в алгебраической геометрии[2]).

[1]) То же самое, разумеется, справедливо и для когомологий Чеха; к сожалению, метод Чеха дает удовлетворительные результаты только для паракомпактных пространств.

[2]) Значительно более полные результаты (особенно о „когерентных“ пучках модулей) можно найти в работе Гротендика (см. примечание 1 на стр. 7).

Из сказанного выше искушенному читателю будет ясно, что наше изложение теории пучков значительно отличается от изложения Лере и Картана, хотя основные идеи, бесспорно, принадлежат этим авторам. По-видимому, можно считать, что теория пучков приняла практически завершенную форму, поскольку, с одной стороны, она достигла, вероятно, максимальной степени общности и, с другой стороны, ее методы во многих отношениях стали значительно более простыми, чем методы более ранних авторов. Однако не следует забывать ту роль, которую они сыграли; ясно, что наше изложение отличается от изложения Лере и Картана в большинстве случаев лишь улучшением деталей[1]). Наиболее важным шагом на этом пути было, по-видимому, построение разумной теории, имеющей смысл для всех топологических пространств. Этот результат, как отмечено выше, принадлежит Гротендику, но, вероятно, вопрос не мог бы быть даже так поставлен без работ Серра по алгебраическим многообразиям.

Чтобы иметь сравнительно полное изложение теории пучков, нужно было бы рассмотреть еще несколько важных вопросов: соотношения между пучками и сингулярными гомологиями, двойственность в многообразиях, расслоенные пространства и пучки с группами операторов, когомологические операции и т. д.

Ясно, что включение этих тем в настоящий том привело бы к значительной задержке его публикации, поэтому они составят второй том этого труда, в котором можно будет узнать, например, как вычислять группы гомологий сферы (эту задачу, к сожалению, нельзя решить, пользуясь результатами I тома).

Вполне очевидно, что эта книга никогда не увидела бы света без неоценимой помощи и вдохновляющей поддержки (хотя и не без вполне понятной заинтересованности) со стороны многих математиков, в особенности Бурбаки, А. Картана, Картье, Гротендика и Серра. С другой стороны, первая редакция этого тома была написана в течение 1954/55 учебного года, когда автор занимал в Иллинойском университете пост приглашенного профессора и находился поэтому в особенно благоприятных условиях. Наконец, печатание этой книги оказалось возможным благодаря институту математики Страсбургского университета. Всем оказавшим помощь, близким и далеким, автор счастлив выразить самую горячую благодарность.

[1]) Не входя в обсуждение истории предмета, следует напомнить, что некоторые основные идеи теории пучков и спектральных последовательностей были введены Лере в 1945 г. и в последующие годы. Общее понятие спектральной последовательности было затем сформулировано Кошулем. Первое связное изложение теории пучков, основанное на понятии „резольвенты", принадлежит А. Картану. Наконец, большую роль в развитии этой теории сыграло доказательство теоремы де Рама, данное А. Вейлем в 1947 г.

УКАЗАНИЯ АВТОРА

Для читателей, не знакомых с вопросами, которые рассматриваются в этой книге, будут, возможно, полезными некоторые указания о том, как ее читать.

Необходимо прочесть § 1 и 2 гл. I и § 1 и 2 гл. II. Потом можно читать п. 3.1 гл. II (вялые пучки), затем п. 4.1—4.4, чтобы знать определения и важнейшие свойства групп когомологий с коэффициентами в пучке. После этого нужно прочесть § 4 гл. I (спектральные последовательности), а также ту часть § 3 гл. II, которая относится к мягким пучкам. Затем можно закончить чтение § 4 гл. II (самые существенные пункты — это п. 4.5—4.10).

Перед изучением когомологий Чеха полезно прочесть начало § 3 гл. I, в особенности п. 3.1—3.5. После этого при первом чтении § 5 гл. II можно ограничиться п. 5.1, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7—5.10, опуская все, что касается семейств носителей.

В части, касающейся произведений в когомологиях, практически необходимо одновременно изучать конец § 3 гл. I (п. 3.6—3.12) и § 6 гл. II, поскольку эти два параграфа тесно связаны между собой.

Точно так же полезно читать одновременно § 5 гл. I и § 7 гл. II, пробуя в качестве упражнения действовать в произвольной абелевой категории, обладающей достаточным количеством инъективных объектов. Полезно также построить чисто функторные доказательства основных теорем § 4 гл. II.

Читатель, желающий познакомиться с некоторыми приложениями теории пучков или углубиться в некоторые аспекты этой теории, может обратиться к работе Серра о когерентных алгебраических пучках [Serre J. P., *Ann. Math.*, **61** (1955), 197—278 [1]], к работе Гротендика [2] и, наконец, к трудам семинара А. Картана [3], посвященным функциям нескольких комплексных переменных. Можно также обратиться к недавнему сочинению Хирцебруха, изданному в хорошо известной серии Ergebnisse der Mathematik, которое

[1]) Имеется русский перевод: Серр Ж.-П., Когерентные алгебраические пучки, сборник „Расслоенные пространства", ИЛ, М., 1958, стр. 372—450. — *Прим. ред.*

[2]) См. примечание 1 на стр. 7. — *Прим. ред.*

[3]) Cartan H., Séminaire de Topologie algébrique de l'E. N. S., Paris, 1951—1952. — *Прим. ред.*

содержит важные приложения теории пучков к теории компактных аналитических многообразий [1]).

Заметим в заключение, что ссылки типа теоремы 4.9.3 указывают, что речь идет о п. 4.9 и, значит, о § 4 *из той же главы*, если не оговорено противное,

[1]) Hirzebruch F., Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin, 1956. По этим вопросам см. также Чжэнь Шэн-шэнь. Комплексные многообразия, ИЛ, М., 1961. — *Прим. ред.*

ГЛАВА I

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

§ 1. МОДУЛИ И ФУНКТОРЫ

1.1. Точные последовательности модулей.

Пусть A — кольцо с единицей, L, M — два левых A-модуля. Множество гомоморфизмов модуля L в M является абелевой группой, которая будет обозначаться через $\mathrm{Hom}_A(L, M)$ или просто $\mathrm{Hom}(L, M)$, когда это не приводит к недоразумению.

Для заданного гомоморфизма $f: L \to M$ положим

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0), \quad \mathrm{Im}(f) = f(L), \quad \mathrm{Coker}(f) = M/f(L).$$

Это снова левые A-модули.

Последовательность

$$\ldots \to L_n \xrightarrow{f_n} L_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} L_{n+2} \to \ldots$$

A-модулей и их гомоморфизмов называется *точной*, если $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Ker}(f_{n+1})$ для всех n. Например, последовательность

$$0 \to L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \to 0$$

точна тогда и только тогда, когда f — мономорфизм, g — эпиморфизм [1]) и, кроме того, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. В этом случае L' можно отождествить с подмодулем модуля L, а L'' — с фактор-модулем L/L'.

1.2. Свойства групп Hom (L, M).

В этом пункте рассматриваются левые модули над фиксированным кольцом A.

Предположим, что заданы гомоморфизмы

$$f: L' \to L, \quad g: M \to M';$$

[1]) Гомоморфизм $f: L \to M$ называется *мономорфизмом*, если он взаимно однозначен или, что равносильно, если $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Он называется *эпиморфизмом*, если отображает L на все M или, что равносильно, если $\mathrm{Coker}(f) = 0$. *Изоморфизмом* называется гомоморфизм, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом. Заметим, что автор употребляет для соответствующих понятий слова „injectif", „surjectif" и „bijectif". Мы предпочли использовать указанные выше термины, уже ставшие употребительными в нашей литературе. В случае когда речь идет об отображениях абстрактных множеств, мы говорим о „взаимно однозначных отображениях" и об „отображениях на все множество". — *Прим. ред.*

тогда можно определить гомоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}(f, g) : \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(L', M'),$$

а именно гомоморфизм, который всякий $u : L \to M$ переводит в $g \circ u \circ f : L' \to M'$. Этот факт выражают следующими словами: группа $\mathrm{Hom}(L, M)$ *контравариантным* образом зависит от L и *ковариантным* образом — от M.

Группы $\mathrm{Hom}(L, M)$ обладают следующими двумя основными свойствами:

Если задана точная последовательность вида

$$0 \to M' \to M \to M'',$$

то для всякого L соответствующая последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(L, M') \to \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(L, M'')$$

точна.

Если задана точная последовательность вида

$$L' \to L \to L'' \to 0,$$

то для любого M соответствующая последовательность

$$\mathrm{Hom}(L', M) \leftarrow \mathrm{Hom}(L, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(L'', M) \leftarrow 0$$

точна.

Эти свойства очевидны.

1.3. Проективные модули.

Левый A-модуль L называется *проективным*, если для каждой точной последовательности

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

соответствующая последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(L, X') \to \mathrm{Hom}(L, X) \to \mathrm{Hom}(L, X'') \to 0$$

точна. В силу предыдущего пункта проективные A-модули характеризуются следующим свойством:

(PR) *Пусть $p : X \to X''$ — эпиморфизм. Тогда для каждого гомоморфизма $f'' : L \to X''$ существует такой гомоморфизм $f : L \to X$, что $f'' = p \circ f$.*

Теорема 1.3.1. *Для того чтобы A-модуль был проективным, необходимо и достаточно, чтобы он являлся прямым слагаемым некоторого свободного A-модуля.*

Заметим прежде всего, что свободный модуль проективен, так как гомоморфизм свободного модуля L вполне определяется значениями (совершенно произвольными), которые он принимает на базисе

модуля L. С другой стороны, ясно, что прямое слагаемое проективного модуля проективно. Поэтому указанное выше условие является достаточным. Чтобы доказать необходимость этого условия, представим проективный модуль L в виде $L = F/R$, где F — некоторый свободный A-модуль и R — подмодуль модуля F. Так как L проективен, то тождественное отображение $L \to L$ можно разложить в композицию некоторого гомоморфизма $L \to F$ и канонического отображения $F \to L$, что доказывает наше утверждение.

Из этой теоремы следует, очевидно, что *всякий A-модуль является фактор-модулем проективного A-модуля.* В дальнейшем (§ 5) нам потребуется следующий, более точный, результат.

Теорема 1.3.2. *Если дана диаграмма A-модулей*

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d] & & P'' \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

в которой строка и столбцы точны, а P' и P'' проективны, то можно найти такой проективный A-модуль P и такие гомоморфизмы $P' \to P$, $P \to P''$, $P \to X$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

коммутативна и образована точными последовательностями.

Для доказательства положим $P = P' \times P''$ (таким образом, P является проективным модулем) и определим гомоморфизмы $P' \to P$ и $P \to P''$, исходя из этого разложения модуля P в прямую сумму; получаем таким образом диаграмму точных последовательностей

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

Для определения гомоморфизма $P \to X$ построим гомоморфизм $P'' \to X$ так, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P'' \arrow[dl] \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X'' \end{tikzcd}$$

была коммутативной (это возможно, так как P'' — проективный модуль и отображение $X \to X''$ эпиморфно). Построим затем гомоморфизм $P' \to X$ как композицию $P' \to X'$ и $X' \to X$. Существует (и притом единственный) гомоморфизм $P \to X$, который на прямых слагаемых P' и P'' совпадает с построенными гомоморфизмами. Очевидно, что этот гомоморфизм обладает требуемыми свойствами.

В заключение отметим, что если кольцо A является *кольцом главных идеалов*, то всякий *проективный A-модуль свободен* и наоборот, так как в этом случае каждый подмодуль свободного модуля свободен.

1.4. Инъективные модули.

A-модуль L называется *инъективным*, если для всякой точной последовательности

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

соответствующая последовательность

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(X', L) \leftarrow \mathrm{Hom}(X, L) \leftarrow \mathrm{Hom}(X'', L) \leftarrow 0$$

точна. Другими словами, должно выполняться условие

(INJ) *Пусть $j: X' \to X$ — мономорфизм, тогда для всякого гомоморфизма $f': X' \to L$ найдется такой гомоморфизм $f: X \to L$, что $f' = f \circ j$.*

Это значит, что всякий гомоморфизм любого подмодуля модуля X в L продолжается до гомоморфизма модуля X в L.

Теорема 1.4.1. *Для того чтобы левый A-модуль L был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого левого идеала I в A и любого гомоморфизма $f: I \to L$ существовал такой $x \in L$, что $f(\lambda) = \lambda \cdot x$ для каждого $\lambda \in I$.*

Это условие необходимо, поскольку f можно продолжить до гомоморфизма $A \to L$.

Обратно, предположим, что условие выполнено, и пусть X — некоторый модуль, X' — подмодуль модуля X и f — гомоморфизм $X' \to L$. Рассматривая пары (Y, g), где Y является подмодулем X, содержащим X', а g — гомоморфизмом модуля Y в L, продолжающим f, можно показать, используя теорему Цорна, что f допускает максимальное продолжение (Y, g). Если Y отличен от X, то можно указать элемент $x \in X$, не принадлежащий Y, некоторый левый идеал I в A (а именно множество таких $\lambda \in A$, что $\lambda \cdot x \in Y$) и гомоморфизм $h: I \to L$, а именно $\lambda \to g(\lambda \cdot x)$. По условию найдется такой элемент $u \in L$, что соотношение $\lambda x \in Y$ влечет за собой $g(\lambda x) = \lambda u$. Но тогда g можно было бы продолжить на подмодуль модуля X, порожденный Y и x, что приводит к противоречию.

Если, например, основное кольцо A является *кольцом главных идеалов*, то L инъективен тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \neq 0$ из кольца A эндоморфизм $x \to \lambda x$ модуля L *эпиморфен*.

Теорема 1.4.2. *Всякий A-модуль является подмодулем некоторого инъективного A-модуля.*

Для доказательства рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}$ целых рациональных чисел, аддитивную группу $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел и $\mathbf{Z}$-модуль

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

В силу предыдущего критерия модуль $\mathbf{T}$ *инъективен*. Ясно, что всякую *циклическую* группу (конечного или бесконечного порядка) можно погрузить в $\mathbf{T}$.

Пусть теперь L — левый A-модуль, построим

$$\hat{L} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{T});$$

это, очевидно, правый A-модуль. Точно так же

$$\hat{\hat{L}} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\hat{L}, \mathbf{T})$$

является левым A-модулем; не менее очевидно существование канонического гомоморфизма

$$L \to \hat{\hat{L}}.$$

Докажем прежде всего, что это отображение мономорфно. Для этого достаточно показать, что для любого $x \neq 0$ из L существует такой гомоморфизм $f: L \to \mathbf{T}$, что $f(x) \neq 0$. Пусть G — циклическая группа, порожденная элементом x в абелевой группе L. Группа G вкладывается в $\mathbf{T}$, что позволяет определить f на G. Но так как $\mathbf{T}$ является инъективным модулем, то f продолжается на L, откуда и следует наше утверждение.

Представим теперь $\hat{L}$ как фактор-модуль проективного модуля F и докажем, что $\hat{F}$ является левым инъективным модулем. Действительно, пусть X — левый A-модуль и f — гомоморфизм подмодуля X' модуля X в A-модуль $\hat{F}$. Переходя к дуальным объектам, получим гомоморфизм $\hat{f}: \hat{\hat{F}} \to \hat{X}'$ и, в частности, так как F вкладывается в $\hat{\hat{F}}$, гомоморфизм F в $\hat{X}'$. Но X' является подмодулем X, а $\mathbf{T}$ — инъективный модуль, поэтому $\hat{X}'$ есть фактор-модуль $\hat{X}$. В силу проективности F гомоморфизму $\hat{f}: F \to \hat{X}'$ соответствует гомоморфизм $F \to \hat{X}$, который по двойственности определяет гомоморфизм $\hat{\hat{X}} \to \hat{F}$, продолжающий f, и тем более продолжение f на X. Справедливость теоремы вытекает из того, что L является подмодулем в $\hat{\hat{F}}$.

Мы оставляем читателю возможность убедиться с помощью предыдущего результата в том, что *модуль L инъективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым любого модуля, его содержащего.*

Очевидно, что для инъективных модулей имеет место результат, подобный теореме 1.3.2. Его формулировку и доказательство мы оставляем читателю.

1.5. Тензорные произведения.

Пусть L — *правый* A-модуль и M — *левый* A-модуль. Образуем свободную абелеву группу (L, M), базой которой является множество $L \times M$, и рассмотрим в (L, M) подгруппу $N_A(L, M)$, порожденную элементами вида

$$(x' + x'', y) - (x', y) - (x'', y),$$
$$(x, y' + y'') - (x, y') - (x, y''),$$
$$(xa, y) - (x, ay),$$

где $x, x', x'' \in L$, $y, y', y'' \in M$ и $a \in A$. *Тензорным произведением модулей L и M* называется абелева группа

$$L \otimes_A M = (L, M)/N_A(L, M).$$

Образ пары (x, y) в $L \otimes_A M$ обозначается через $x \otimes y$. Элементы такого вида порождают $L \otimes_A M$, и имеют место формулы $(x' + x'') \otimes y = x' \otimes y + x'' \otimes y, \ldots$, соответствующие „соотношениям“, наложенным на свободную абелеву группу (L, M).

Пусть G — некоторая абелева группа. Отображение $f: L \times M \to G$ называется *билинейным*, если для любого заданного y (соответственно x) отображение $x \to f(x, y)$ [соответственно $y \to f(x, y)$] является гомоморфизмом абелевых групп и если, кроме того, имеет место тождество $f(xa, y) = f(x, ay)$ для каждого $a \in A$. Например, существует каноническое билинейное отображение

$$L \times M \to L \otimes_A M,$$

а именно $(x, y) \to x \otimes y$. Более того, *каждое* билинейное отображение $L \times M \to G$ получается композицией предыдущего отображения с некоторым гомоморфизмом абелевых групп $L \otimes_A M \to G$.

Если рассматривать A как правый A-модуль, то для всякого левого A-модуля M имеет место канонический изоморфизм $A \underset{A}{\otimes} M = M$, получаемый отождествлением $a \otimes m$ с $a \cdot m$.

Пусть A и A' — два кольца, L и M — соответственно правый и левый A-модули, L' и M' — соответственно правый и левый A'-модули. Пусть, кроме того, даны гомоморфизм колец $u: A \to A'$ и гомоморфизмы $f: L \to L'$ и $g: M \to M'$, совместимые с u, т. е. f и g — гомоморфизмы абелевых групп, удовлетворяющие условиям

$$f(xa) = f(x)u(a), \quad g(ay) = u(a)g(y).$$

В этом случае найдется один и только один гомоморфизм

$$f \otimes g: L \underset{A}{\otimes} M \to L' \underset{A'}{\otimes} M',$$

который переводит $x \otimes y$ в $f(x) \otimes g(y)$.

Теорема 1.5.1. *Если дана точная последовательность правых A-модулей*

$$X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0,$$

то для всякого левого A-модуля Y соответствующая последовательность

$$X' \underset{A}{\otimes} Y \xrightarrow{f \otimes 1} X \underset{A}{\otimes} Y \xrightarrow{g \otimes 1} X'' \underset{A}{\otimes} Y \to 0$$

точна.

Положим $f \otimes 1 = f'$ и $g \otimes 1 = g'$. Единственным нетривиальным пунктом в доказательстве является утверждение $\mathrm{Ker}(g') \subset \mathrm{Im}(f')$. Положим $M = f(X') = \mathrm{Ker}(g)$. Ясно, что $\mathrm{Im}(f')$ является подгруппой в $X \otimes Y$, порожденной произведениями $m \otimes y$ ($m \in M$, $y \in Y$). Всякий $x'' \in X''$ представим в виде $g(x)$, где x однозначно определен по модулю M. Можно, следовательно, определить билинейное отображение $X'' \times Y \to (X \otimes Y)/\mathrm{Im}(f')$ формулой $(x'', y) \to x \otimes y$, где x определяется условием $g(x) = x''$. Это билинейное отображение определяет гомоморфизм $X'' \otimes Y \to (X \otimes Y)/\mathrm{Im}(f')$, который переводит $g(x) \otimes y$ в класс элемента $x \otimes y$ по модулю $\mathrm{Im}(f')$. Композиция этого гомоморфизма с $g \otimes 1 = g'$ равна 0 на $\mathrm{Ker}(g')$. Это, очевидно, доказывает включение $\mathrm{Ker}(g') \subset \mathrm{Im}(f')$.

Если гомоморфизм $X' \to X$ является мономорфизмом, то гомоморфизм $X' \otimes Y \to X \otimes Y$, вообще говоря, не будет мономорфизмом. Однако он будет мономорфизмом, если Y — *свободный* модуль. Вообще если левый A-модуль Y обладает тем свойством, что для *всякого* мономорфизма $X' \to X$ соответствующий гомоморфизм $X' \otimes Y \to X \otimes Y$ является мономорфизмом, то модуль Y называется *плоским*. В § 5 мы дадим „внутреннюю“ характеристику плоских A-модулей.

1.6. Индуктивные пределы.

Пусть I — *направленное упорядоченное множество* [1]). Предположим, что заданы множества E_i $(i \in I)$ и что для всякой пары (i, j), такой, что $i \geqslant j$, задано отображение

$$f_j^i : E_i \to E_j,$$

причем выполнены следующие условия „транзитивности“:

$$f_i^i = 1 \quad \text{для всех} \quad i; \qquad f_k^i = f_k^j \circ f_j^i \quad \text{для} \quad i \geqslant j \geqslant k.$$

В *множестве, являющемся объединением всех* E_i, введем соотношение эквивалентности, согласно которому будем отождествлять $x_i \in E_i$ и $x_j \in E_j$ тогда и только тогда, когда можно найти индекс $k \leqslant i, j$, такой, что $f_k^i(x_i) = f_k^j(x_j)$. Соответствующее фактор-множество называется *индуктивным пределом* [2]) множеств E_i (относительно заданных отображений f_j^i); его обозначают

$$E = \lim_{I} \operatorname{ind} E_i.$$

Для всякого i имеем каноническое отображение

$$f^i : E_i \to E,$$

которое обладает следующими свойствами:

(a) $f^j = f^i \circ f_i^j$ для $i \leqslant j$.

(b) Для того чтобы $f^i(x_i) = f^j(x_j)$, необходимо и достаточно, чтобы $f_k^i(x_i) = f_k^j(x_j)$ при некотором $k \leqslant i, j$.

(c) Объединение в E образов $f^i(E_i)$ совпадает с E.

С другой стороны, имеет место „свойство универсальности“: пусть заданы множество F и отображения $h^i : E_i \to F$, такие, что $h^j = h^i \circ f_i^j$ для всех $i \leqslant j$; тогда существует такое отображение $h : E \to F$, что $h^i = h \circ f^i$ для всех i, и это отображение единственно.

Если E_i являются группами (соответственно кольцами), а f_j^i — гомоморфизмами групп (соответственно колец), то ясно, что на E можно ввести (каноническим образом) структуру группы (соответственно кольца) так, чтобы f^i были при этом гомоморфизмами.

Вообще предположим, что для каждого $i \in I$ заданы кольцо A_i, правый A_i-модуль L_i и левый A_i-модуль M_i. Предположим, кроме того, что для $i \geqslant j$ заданы гомоморфизмы колец

$$u_j^i : A_i \to A_j$$

[1]) То есть частично упорядоченное множество, для каждых двух элементов i, j которого найдется такой $k \in I$, что $k \leq i$, $k \leq j$. — *Прим. ред.*

[2]) В русской литературе употребляется также термин „предел прямого спектра“. — *Прим. ред.*

и гомоморфизмы групп

$$f^i_j : L_i \to L_j, \qquad g^i_j : M_i \to M_j,$$

совместимые с u^i_j. Пусть

$$A = \lim\operatorname{ind} A_i, \qquad L = \lim\operatorname{ind} L_i, \qquad M = \lim\operatorname{ind} M_i.$$

Тогда на L существует структура правого A-модуля, а на M — структура левого A-модуля, причем отображения f^i и g^i являются гомоморфизмами абелевых групп, совместимыми с гомоморфизмами колец u^i.

При тех же предположениях *существует канонический изоморфизм*

$$L \otimes_A M = \lim\operatorname{ind} L_i \otimes_{A_i} M_i,$$

причем индуктивный предел в правой части равенства берется относительно семейства гомоморфизмов $f^i_j \otimes g^i_j$, а указанный выше изоморфизм можно получить из рассмотрения гомоморфизмов

$$f^i \otimes g^i : L_i \otimes_{A_i} M_i \to L \otimes_A M.$$

Проверка всех этих утверждений, не представляющая никаких трудностей, оставляется читателю.

Отметим еще следующее утверждение, относящееся к тому же кругу идей: *индуктивный предел точных последовательностей есть снова точная последовательность*. Другими словами, пусть заданы индуктивная система колец A_i и индуктивные системы модулей L'_i, L_i, L''_i, образующих для каждого i точную последовательность

$$L'_i \to L_i \to L''_i,$$

причем для $i > j$ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L'_i & \to & L_i & \to & L''_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L'_j & \to & L_j & \to & L''_j \end{array}$$

коммутативна. Тогда, если положить

$$L' = \lim\operatorname{ind} L'_i, \qquad L = \lim\operatorname{ind} L_i, \qquad L'' = \lim\operatorname{ind} L''_i,$$

то последовательность модулей и гомоморфизмов

$$L' \to L \to L'',$$

полученная очевидным способом из заданных точных последовательностей, также точна.

1.7. Категории и функторы.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о категориях и функторах. Мы изложим их сейчас с возможно более „наивной“ точки зрения.

Категория — это собрание $\mathfrak{K}$ объектов (которое может и не быть множеством в строго математическом значении этого слова), такое, что:

(a) Для любой пары объектов $X, Y \in \mathfrak{K}$ задано *множество* $\mathrm{Hom}(X, Y)$, элементы которого называются *гомоморфизмами объекта* X *в* Y. Вместо $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ часто пишут

$$f: X \to Y.$$

(b) Каковы бы ни были объекты $X, Y, Z \in \mathfrak{K}$, определено отображение

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z),$$

которое обозначают $(f, g) \to g \circ f$ и называют *композицией гомоморфизмов* [1]).

При этом должны выполняться следующие две аксиомы:

(K1) *Если заданы гомоморфизмы* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to T$, *то*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(K2) *Для каждого* $X \in \mathfrak{K}$ *существует такой гомоморфизм* $e_X: X \to X$, *что* $e_X \circ f = f$ *для любого* $f: Y \to X$ *и* $f \circ e_X = f$ *для любого* $f: X \to Y$ (говорят, что e_X есть *тождественный* или *единичный* гомоморфизм объекта X в X; обычно его обозначают через e или даже 1, если контекст дает возможность избежать недоразумений).

Например, топологические пространства образуют категорию, если определить $\mathrm{Hom}(X, Y)$ как множество непрерывных отображений пространства X в Y, а композицию гомоморфизмов так, как это обычно делается. Точно так же левые модули над заданным основным кольцом образуют категорию при естественном определении множеств $\mathrm{Hom}(X, Y)$ и композиции гомоморфизмов.

Пусть X и Y — два объекта категории $\mathfrak{K}$. Гомоморфизм $u: X \to Y$ называют *изоморфизмом* объекта X на Y, если существует гомоморфизм $v: Y \to X$, удовлетворяющий условиям

$$u \circ v = e_Y, \qquad v \circ u = e_X.$$

Каждой категории $\mathfrak{K}$ соответствует *дуальная категория* $\mathfrak{K}^*$, определяемая следующим образом: объектами категории $\mathfrak{K}^*$ являются

[1]) Некоторые авторы говорят „морфизм“ вместо „гомоморфизм“.

объекты из $\mathfrak{K}$, но если даны два таких объекта X и Y, то $\mathfrak{K}^*$-гомоморфизмом $X \to Y$ будет, по определению, $\mathfrak{K}$-гомоморфизм $Y \to X$. Композиция гомоморфизмов в $\mathfrak{K}^*$ определяется так же, как в категории $\mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$ — две категории; под *ковариантным функтором*

$$F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$$

понимают задание объекта $F(X) \in \mathfrak{K}'$ для каждого $X \in \mathfrak{K}$ и гомоморфизма $F(u) : F(X) \to F(Y)$ для каждого гомоморфизма $u : X \to Y$. При этом должны быть выполнены следующие два условия: *если u — тождественный гомоморфизм, то и $F(u)$ — тождественный гомоморфизм*;

$$F(u \circ v) = F(u) \circ F(v)$$

всегда, когда это соотношение имеет смысл.

Например, для каждого $A \in \mathfrak{K}$ формула $X \to \operatorname{Hom}(A, X)$ определяет очевидным образом ковариантный функтор на $\mathfrak{K}$ со значениями в категории всех множеств.

Для заданных ковариантных функторов $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ и $G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ очевидным образом определяется композиция функторов $G \circ F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}''$.

Если заданы два ковариантных функтора $F, G : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$, то *гомоморфизмом* (или *естественным преобразованием*) функтора F *в* G называют задание для каждого $X \in \mathfrak{K}$ гомоморфизма $T(X) : F(X) \to G(X)$, такое, что, каковы бы ни были $X, Y \in \mathfrak{K}$ и $u \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(u)} & F(Y) \\ {\scriptstyle T(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow{G(u)} & G(Y) \end{array}$$

В качестве примера рассмотрим категорию $\mathfrak{K}$, два объекта $A, B \in \mathfrak{K}$ и функторы $X \to \operatorname{Hom}(A, X)$ и $X \to \operatorname{Hom}(B, X)$. Каждый гомоморфизм $t : A \to B$ определяет гомоморфизм второго функтора в первый, который получается, если сопоставить каждому $X \in \mathfrak{K}$ отображение $u \to u \circ t$ множества $\operatorname{Hom}(B, X)$ в $\operatorname{Hom}(A, X)$.

Предыдущие рассуждения применяются также к *контравариантным функторам* $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$, определяемым как ковариантные функторы $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'^*$.

1.8. Абелевы категории.

Аддитивной категорией называют категорию $\mathfrak{K}$, в которой для любых $X, Y \in \mathfrak{K}$ на множестве $\operatorname{Hom}(X, Y)$ определена структура абелевой группы так, что выполнена следующая аксиома:

(КА1) *Каковы бы ни были $X, Y, Z \in \mathfrak{K}$, каноническое отображение*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$$

билинейно.

Наиболее важными среди аддитивных категорий являются те, в которых можно разумным образом определить понятие *точной последовательности*. Мы сейчас покажем, каким образом это можно сделать.

Рассмотрим гомоморфизм

$$u : A \to B$$

в аддитивной категории $\mathfrak{K}$. Назовем *ядром* гомоморфизма u пару (N, j), образованную объектом $N \in \mathfrak{K}$ и гомоморфизмом (который называют „каноническим") $j : N \to A$, удовлетворяющую следующему условию: *для любого $X \in \mathfrak{K}$ последовательность абелевых групп*

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, N) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(X, B)$$

точна. Это, очевидно, означает, что для заданного гомоморфизма $f : X \to A$ имеем $u \circ f = 0$ тогда и только тогда, когда f разлагается в композицию гомоморфизмов

$$X \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{j} A,$$

и что, кроме того, это разложение гомоморфизма f единственно. Из этого определения немедленно следует, что пара (N, j) единственна с точностью до изоморфизма, т. е. если (N, j) и (N', j') — два ядра гомоморфизма u, то существуют такие взаимно обратные гомоморфизмы

$$i : N \to N', \qquad i' : N' \to N,$$

что $j = j' \circ i$, $j' = j \circ i'$.

Аналогично *коядром* гомоморфизма u называют любую такую пару (j^*, N^*), образованную объектом $N^* \in \mathfrak{K}$ и гомоморфизмом $j^* : B \to N^*$, что для каждого $Y \in \mathfrak{K}$ последовательность абелевых групп

$$0 \to \mathrm{Hom}(N^*, Y) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(B, Y) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(A, Y)$$

точна. Это значит, что гомоморфизм $g : B \to Y$ удовлетворяет условию $g \circ u = 0$ тогда и только тогда, когда g разлагается в композицию гомоморфизмов

$$B \xrightarrow{j^*} N^* \xrightarrow{g''} Y,$$

и, кроме того, что это разложение единственно. Как и выше, легко видеть, что коядро гомоморфизма u, если оно существует, единственно с точностью до изоморфизма.

Будем предполагать теперь, что $\mathfrak{K}$ удовлетворяет следующей аксиоме:

(КА2) *Для каждого гомоморфизма* $u: A \to B$ *существует последовательность*

$$N \xrightarrow{j} A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{p^*} B \xrightarrow{j^*} N^*$$

объектов из $\mathfrak{K}$ *и гомоморфизмов, обладающая следующими свойствами:* (N, j) *является ядром гомоморфизма* u, (j^*, N^*) — *коядром* u, (I, p^*) *есть ядро гомоморфизма* j^*, (p, I) — *коядро* j, *и мы имеем*

$$u = p^* \circ p.$$

Ясно, что для заданного u последовательность, существование которой утверждает аксиома (КА2), единственна с точностью до изоморфизма. Говорят, что пара (I, p^*) есть *образ* гомоморфизма u, а пара (p, I) — кообраз u.

Укажем главные следствия из аксиомы (КА2).

Прежде всего в категории $\mathfrak{K}$ существует *нулевой объект*, обозначаемый 0, который характеризуется с точностью до изоморфизма тем, что абелева группа $\mathrm{Hom}(0,0)$ состоит из единственного нулевого элемента. Для этого достаточно рассмотреть ядро единичного гомоморфизма $X \to X$ для некоторого $X \in \mathfrak{K}$.

Очевидно, $\mathrm{Hom}(0, X) = \mathrm{Hom}(X, 0) = 0$ для любого $X \in \mathfrak{K}$.

С другой стороны, говорят, что гомоморфизм $u: A \to B$ является *мономорфизмом* (соответственно *эпиморфизмом*), если его ядро (соответственно коядро) есть нуль. Предположим, что u — мономорфизм. Для каждого X отображение $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$, индуцированное гомоморфизмом u, является в этом случае мономорфизмом, т. е. $u \circ f = 0$ влечет за собой $f = 0$. Очевидно, что это свойство характеризует мономорфизмы. Рассмотрим, кроме того, кообраз (p, I) для u. Так как (p, I) является коядром нулевого гомоморфизма, то для каждого $Y \in K$ гомоморфизм p индуцирует отображение $\mathrm{Hom}(I, Y) \to \mathrm{Hom}(A, Y)$, которое является изоморфизмом; следовательно, p есть *изоморфизм* объекта A на I.

Точно так же, если предположить, что u — эпиморфизм, то получаем, что канонический гомоморфизм $p^*: I \to B$ есть изоморфизм. Поэтому, *для того чтобы* $u: A \to B$ *был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы* u *был мономорфизмом и эпиморфизмом*. Отметим, между прочим, что, каков бы ни был гомоморфизм u, гомоморфизмы j и p^*, фигурирующие в аксиоме (КА2), являются мономорфизмами, а гомоморфизмы p и j^* — эпиморфизмами.

Рассмотрим теперь гомоморфизмы

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C,$$

такие, что $v \circ u = 0$. Пусть I — образ u, а N — ядро v. Так как $v \circ u = 0$, то u разлагается в композицию

$$A \xrightarrow{\bar{u}} N \xrightarrow{j} B,$$

где вторая стрелка обозначает канонический гомоморфизм объекта N в B. Так как $j \circ \bar{u}$ аннулирует ядро u и так как j — мономорфизм, то $\bar{u}$ аннулирует ядро гомоморфизма u. Поэтому $\bar{u}$ разлагается в композицию гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{\bar{\bar{u}}} N,$$

где p обозначает канонический эпиморфизм объекта A на I. В результате получаем, что существует вполне определенный гомоморфизм $\operatorname{Im}(u) \to \operatorname{Ker}(v)$, такой, что u разлагается в композицию гомоморфизмов

$$A \to \operatorname{Im}(u) \xrightarrow{\bar{\bar{u}}} \operatorname{Ker}(v) \to B.$$

При этом ясно, что $\bar{\bar{u}}$ — *мономорфизм*, так как при его композиции с гомоморфизмом $\operatorname{Ker}(v) \to B$ получается мономорфизм $\operatorname{Im}(u) \to B$.

Будем говорить, что последовательность (1) является *точной*, если $v \circ u = 0$ и если $\bar{\bar{u}}$ является *изоморфизмом*. Понятие точной последовательности, состоящей из произвольного числа членов, выводится отсюда очевидным образом.

Например, гомоморфизм $u: A \to B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда последовательность $0 \to A \xrightarrow{u} B$ точна. Каков бы ни был $u: A \to B$, имеем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}(u) \to A \xrightarrow{u} B \to \operatorname{Coker}(u) \to 0.$$

Все соотношения, справедливые для точных последовательностей модулей, являются справедливыми и здесь[1]).

Рассмотрим, с другой стороны, две категории $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$, удовлетворяющие предыдущим аксиомам, и ковариантный функтор $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$. Говорят, что F является *аддитивным функтором*, если при любых $X, Y \in \mathfrak{K}$ отображение $\operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(F(X), F(Y))$, индуцированное функтором F, есть гомоморфизм абелевых групп. Аддитивный функтор F называется *точным слева*, если он преобразует каждую точную последовательность

$$0 \to X \to Y \to Z$$

в точную последовательность

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z),$$

и *точным справа*, если он преобразует каждую точную последовательность

$$X \to Y \to Z \to 0$$

[1]) Значительно более полные сведения по этому вопросу можно найти в статье Д. Буксбаума [Buchsbaum D., Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 1—34]. (Русский перевод имеется в добавлении к книге: Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960. — *Прим. ред.*)

в точную последовательность

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0.$$

Если F является точным слева и точным справа, то F называется *точным* функтором. Ясно, что в этом случае F преобразует каждую точную последовательность в $\mathfrak{K}$ в точную последовательность в $\mathfrak{K}'$.

В категории $\mathfrak{K}$, удовлетворяющей аксиомам (КА1) и (КА2), имеет смысл понятие *проективного* (соответственно *инъективного*) объекта. Объект A является проективным, если функтор $X \to \mathrm{Hom}(A, X)$ точен. В общем случае этот функтор является только точным слева. Точно так же A является инъективным, если функтор $X \to \mathrm{Hom}(X, A)$ точен. Разумеется, не всегда существует „достаточно много" проективных или инъективных объектов.

Чтобы получить понятие *абелевой категории*, нам остается сформулировать аксиому, которая обеспечивает возможность образования в $\mathfrak{K}$ *прямого произведения* двух объектов.

(КА3) *Каковы бы ни были $A, B \in \mathfrak{K}$, существуют объект $C \in \mathfrak{K}$ и гомоморфизмы*

$$p: C \to A, \qquad q: C \to B,$$

такие, что для каждого $X \in \mathfrak{K}$ отображение

$$\mathrm{Hom}(X, C) \to \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B),$$

заданное формулой $u \to (p \circ u, q \circ u)$, является изоморфизмом.

Ясно, что тройка (C, p, q) единственна с точностью до изоморфизма. С другой стороны, легко проверить, что существуют такие канонические гомоморфизмы $i: A \to C$ и $j: B \to C$, что справедливы равенства

$$q \circ i = p \circ j = 0, \qquad p \circ i = q \circ j = i \circ p + j \circ q = 1.$$

С этой точки зрения прямое произведение объектов A и B можно рассматривать как „прямую сумму" объектов A и B.

Так как аксиомы (КА1) и (КА2) являются, очевидно, „автодуальными", то отсюда следует, что категория, дуальная некоторой абелевой категории, является абелевой категорией.

Мы дадим теперь важный пример абелевой категории — категории „предпучков абелевых групп" над топологическим пространством. Мы увидим в гл. II, § 2, что теория пучков также приводит к абелевым категориям, которые содержат достаточно много инъективных (но не проективных) объектов.

1.9. Предпучки над топологическим пространством.

Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим множество всех открытых подмножеств пространства X. Его можно рассматривать как *категорию*, если условиться, что для двух открытых подмножеств $U, V \subset X$ множество $\mathrm{Hom}(U, V)$ состоит из одного элемента, если $U \subset V$, и является пустым в противном случае (так что определять композицию гомоморфизмов излишне). Если теперь задана произвольная категория $\mathfrak{K}$, то *предпучком с базой X и со значениями в* $\mathfrak{K}$ называют любой контравариантный функтор, определенный на категории открытых множеств в X и со значениями в $\mathfrak{K}$.

Следовательно, предпучок $\mathcal{F}$ состоит в сопоставлении объекта $\mathcal{F}(U) \in \mathfrak{K}$ каждому открытому множеству $U \subset X$ и в задании гомоморфизма

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

всякий раз, когда $U \subset V$. При этом требуется, чтобы были выполнены следующие аксиомы: ρ_U^U тождественно, каково бы ни было U; если $U \subset V \subset W$, то

$$\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W.$$

Говорят, что ρ_U^V есть гомоморфизм *ограничения* объекта $\mathcal{F}(V)$ в $\mathcal{F}(U)$.

Пусть $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — два предпучка над X со значениями в $\mathfrak{K}$. Так как речь идет о функторах, то можно ввести понятие *гомоморфизма* $\theta : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$. Этот гомоморфизм является собранием гомоморфизмов $\theta(U) : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}''(U)$, таких, что для $U \subset V$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{\theta(V)} & \mathcal{F}''(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{\theta(U)} & \mathcal{F}''(U) \end{array}$$

(в которой вертикальные стрелки являются гомоморфизмами ограничения) всегда коммутативна. Так как гомоморфизм $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}''$ является элементом *множества*

$$\prod_{U \subset X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'(U), \mathcal{F}''(U)),$$

то гомоморфизмы предпучка $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}''$ образуют *множество*, которое обозначается $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$. Определяя очевидным образом композицию двух гомоморфизмов $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$, получаем отсюда, что *предпучки с заданной базой X и со значениями в заданной категории $\mathfrak{K}$ образуют новую категорию.*

Рассмотрим более частный случай, когда $\mathfrak{K}$ является *абелевой* категорией. В этом случае категория предпучков с базой X и со значениями в $\mathfrak{K}$ также является абелевой. Прежде всего ясно, что множества $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ являются абелевыми группами и пред-

пучок $\mathscr{F}$ является нулевым, если $\mathscr{F}(U)=0$ для всех U. Аксиома (КА 1) абелевых категорий проверяется тривиально. Аксиома (КА 3) также тривиальна: прямая сумма $\mathscr{F}=\mathscr{F}'+\mathscr{F}''$ получается, если положить

$$\mathscr{F}(U)=\mathscr{F}'(U)+\mathscr{F}''(U)$$

и определить очевидным образом гомоморфизмы ограничения в $\mathscr{F}$ (впрочем ясно, что можно определить даже *бесконечные* прямые суммы и *бесконечные* прямые произведения). Остается проверить аксиому (КА 2). Возьмем гомоморфизм $\theta:\mathscr{F}'\to\mathscr{F}''$. Для каждого открытого множества $U\subset X$ выберем в категории $\mathfrak{K}$ последовательность

$$\mathscr{N}(U)\xrightarrow{i(U)}\mathscr{F}'(U)\xrightarrow{p(U)}\mathscr{G}(U)\xrightarrow{j(U)}\mathscr{F}''(U)\xrightarrow{q(U)}\mathscr{N}^*(U)$$

объектов и гомоморфизмов так, чтобы $i(U)$, $p(U)$, $j(U)$ и $q(U)$ были соответственно ядром, кообразом, образом и коядром гомоморфизма $\theta(U):\mathscr{F}'(U)\to\mathscr{F}''(U)$. В силу предыдущего пункта для $U\subset V$ существует, и притом *единственная*, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{N}(V) & \to & \mathscr{F}'(V) & \to & \mathscr{G}(V) & \to & \mathscr{F}''(V) & \to & \mathscr{N}^*(V)\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho_U^V} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho_U^V} & & \downarrow\\
\mathscr{N}(U) & \to & \mathscr{F}'(U) & \to & \mathscr{G}(U) & \to & \mathscr{F}''(U) & \to & \mathscr{N}^*(U).
\end{array}$$

Очевидно, что отображения $U\to\mathscr{N}(U)$, $U\to\mathscr{G}(U)$, $U\to\mathscr{N}^*(U)$ определяют над X предпучки со значениями в $\mathfrak{K}$, причем гомоморфизмы ограничения для этих предпучков получаются с помощью предыдущей диаграммы. Таким образом, мы имеем последовательность

$$\mathscr{N}\xrightarrow{i}\mathscr{F}'\xrightarrow{p}\mathscr{G}\xrightarrow{j}\mathscr{F}''\xrightarrow{q}\mathscr{N}^*$$

предпучков и гомоморфизмов. Непосредственно проверяется, что эта последовательность в категории предпучков со значениями в $\mathfrak{K}$ удовлетворяет условиям, сформулированным в аксиоме (КА 2) абелевых категорий.

Так как предпучки над X со значениями в $\mathfrak{K}$ образуют абелеву категорию, то можно определить понятие *точной последовательности предпучков*. Читатель легко проверит, что для точности последовательности

$$\ldots\to\mathscr{F}_{n-1}\to\mathscr{F}_n\to\mathscr{F}_{n+1}\to\ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества U соответствующая последовательность

$$\ldots\to\mathscr{F}_{n-1}(U)\to\mathscr{F}_n(U)\to\mathscr{F}_{n+1}(U)\to\ldots$$

была точной в категории $\mathfrak{K}$. Между прочим, это показывает, что для любого открытого множества U функтор $\mathscr{F}\to\mathscr{F}(U)$ *точен*.

§ 2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КОМПЛЕКСАХ

В этом параграфе через A обозначено кольцо с единичным элементом [1]).

2.1. Дифференциальные модули.

Левым дифференциальным A-модулем называют левый A-модуль X со структурой, определенной заданием эндоморфизма d, удовлетворяющего условию $d^2=0$. Чаще всего мы будем обозначать дифференциальный A-модуль одной буквой X, но правильнее — и это иногда необходимо — обозначать его через (X, d), где явно указаны и A-модуль X, и дифференциал d.

Гомоморфизм $f:(X, d)\to(X', d')$ есть гомоморфизм A-модулей, подчиненный условию $d'\circ f=f\circ d$. Левые дифференциальные A-модули образуют, очевидно, *категорию*.

Очевидным образом определяются понятия дифференциального подмодуля и дифференциального фактор-модуля данного дифференциального модуля. Можно говорить также о точных последовательностях дифференциальных модулей.

Пусть X — дифференциальный A-модуль. Положим

$$Z(X)=\operatorname{Ker}(d),\quad B(X)=\operatorname{Im}(d).$$

Тогда $B(X)\subset Z(X)$, что позволяет определить *производный модуль*

$$H(X)=Z(X)/B(X)$$

для X. Любой гомоморфизм $f:X\to Y$ дифференциальных A-модулей отображает $Z(X)$ в $Z(Y)$, $B(X)$ в $B(Y)$ и, следовательно, определяет гомоморфизм A-модулей $f^*:H(X)\to H(Y)$.

Таким образом, $X\to H(X)$ можно рассматривать как *ковариантный функтор*, определенный на категории дифференциальных A-модулей, со значениями в категории A-модулей.

[1]) Большинство определений и результатов этого параграфа может быть обобщено на случай, когда вместо категории левых A-модулей рассматривается произвольная абелева категория. Мы оставляем читателю детальное исследование этой более общей ситуации, которая *не лишена* (как можно было бы думать) практического интереса.

Теорема 2.1.1. *Пусть*

$$0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$$

— точная последовательность дифференциальных A-модулей. Тогда существует такой гомоморфизм

$$\partial : H(X'') \to H(X'),$$

что последовательность

$$\begin{tikzcd} & H(X) \arrow[dr, "g^*"] & \\ H(X') \arrow[ur, "f^*"] & & H(X'') \arrow[ll, "\partial"] \end{tikzcd}$$

точна. Кроме того, если имеется коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

то диаграмма

$$\begin{tikzcd} H(X'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "u^*"'] & H(X') \arrow[d, "v^*"] \\ H(Y'') \arrow[r, "\partial"] & H(Y') \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Гомоморфизм ∂ определяется следующим образом. Пусть $\xi'' \in H(X'')$; возьмем элемент $z'' \in Z(X'')$, представляющий ξ''. Так как g — эпиморфизм, то можно записать $z'' = g(x)$ для некоторого $x \in X$. Поскольку $g(dx) = dz'' = 0$, то вследствие точности $dx \in f(X')$ и даже $dx = f(z')$, где $dz' = 0$. С другой стороны, так как $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, то элемент x определен однозначно с точностью до элементов вида $dy + f(x')$ и, следовательно, dx определен однозначно с точностью до элементов вида $f(dx')$. Так как f — мономорфизм, то элемент z' определен однозначно по модулю $B(X')$ и, следовательно, определяет класс $\xi' \in H(X')$, который зависит только от ξ''. Гомоморфизм ∂ преобразует ξ'' в ξ'.

Доказательство этой теоремы оставляется читателю в качестве упражнения.

Следующий важный результат состоит в том, что *функтор $X \to H(X)$ совместим с переходом к индуктивным пределам.* Действительно, возьмем семейство $(X_i)_{i \in I}$ дифференциальных A-модулей, предположим, что I — направленное упорядоченное множество, и, наконец, зададим для $i \geqslant j$ гомоморфизмы дифференциальных

A-модулей $f^i_j: X_i \to X_j$, удовлетворяющие надлежащим условиям транзитивности. Очевидно, что дифференциалы в X_i в пределе дают дифференциал d на A-модуле

$$X = \lim\operatorname{ind} X_i$$

и что канонические отображения $f^i: X_i \to X$ являются гомоморфизмами дифференциальных модулей. Возьмем теперь семейство производных модулей $H(X_i)$ и гомоморфизмы $H(X_i) \to H(X_j)$, индуцированные f^i_j. Тогда можно рассматривать A-модуль $\lim\operatorname{ind} H(X_i)$. Гомоморфизмы $X_i \to X$ определяют в силу „свойства универсальности" индуктивных пределов гомоморфизм

$$\lim\operatorname{ind} H(X_i) \to H(X).$$

Оказывается, что *этот гомоморфизм является изоморфизмом.*

При доказательстве этого утверждения существенно используется то, что индуктивный предел точных последовательностей есть снова точная последовательность. Переходя к пределу в точной последовательности

$$0 \to Z(X_i) \to X_i \xrightarrow{d} B(X_i) \to 0,$$

получаем отождествления

$$Z(X) = \lim\operatorname{ind} Z(X_i), \quad B(X) = \lim\operatorname{ind} B(X_i);$$

переходя к пределу в точной последовательности

$$0 \to B(X_i) \to Z(X_i) \to H(X_i) \to 0,$$

получаем требуемый результат.

Пусть X — правый дифференциальный A-модуль, L — левый A-модуль. Тогда модуль $X \otimes_A L$, снабженный дифференциалом $d \otimes 1$, можно рассматривать как дифференциальный модуль (над кольцом $\mathbf{Z}$ в общем случае и над A, если A коммутативно). Заметим, что существует канонический гомоморфизм

$$H(X) \otimes_A L \to H(X \otimes_A L),$$

определяемый следующим образом. Пусть $\xi \in H(X)$ и $a \in L$. Представим ξ элементом $x \in X$, для которого $dx = 0$. Так как x определен однозначно с точностью до элемента вида dx', то $x \otimes a$ определяет класс в $H(X \otimes_A L)$, зависящий только от ξ и a. Отсюда получается *билинейное* отображение $H(X) \times L \to H(X \otimes_A L)$, которое определяет искомый гомоморфизм. Разумеется, рассматриваемый гомоморфизм является изоморфизмом, если L — *плоский* A-модуль, так как в этом случае функтор $X \to X \otimes_A L$ точен.

Аналогично, пусть X — левый дифференциальный A-модуль, L — левый A-модуль. Тогда в абелевой группе $\mathrm{Hom}(X, L)$ можно определить дифференциал $u \to u \circ d$, а в абелевой группе $\mathrm{Hom}(L, X)$ — дифференциал $u \to d \circ u$. Возьмем такой $u \in \mathrm{Hom}(X, L)$, что $u \circ d = 0$. Ясно, что u равен нулю на $B(X)$; поэтому u индуцирует гомоморфизм $H(X) \to L$. Итак, построен канонический гомоморфизм

$$H(\mathrm{Hom}_A(X, L)) \to \mathrm{Hom}_A(H(X), L).$$

Аналогично определяется гомоморфизм

$$H(\mathrm{Hom}_A(L, X)) \to \mathrm{Hom}_A(L, H(X)).$$

Первый из этих гомоморфизмов *является изоморфизмом для любого* X тогда и только тогда, когда A-модуль L *инъективен*, а второй гомоморфизм является изоморфизмом для любого X тогда и только тогда, когда L *проективен*. Это легко следует из определений.

2.2. Комплексы.

Пусть A — основное кольцо. *Градуированным A-модулем* называют любую последовательность $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ A-модулей. Говорят, что X_n есть компонента степени n в модуле X, а элементы модуля X_n для краткости называют элементами степени n в модуле X. Аналогично *биградуированным A-модулем* называют любое семейство $X = (X_{pq})_{p, q \in \mathbf{Z}}$ A-модулей.

Пусть X — градуированный A-модуль, образованный левыми A-модулями. Если L—правый A-модуль, то через $L \underset{A}{\otimes} X$ обозначают градуированную абелеву группу, компонентой n-й степени которой является группа $L \underset{A}{\otimes} X_n$. Если L — левый A-модуль, то через $\mathrm{Hom}_A(X, L)$ обозначают градуированную абелеву группу, компонентой n-й степени которой является группа $\mathrm{Hom}_A(X_n, L)$.

Пусть X и Y — два левых градуированных A-модуля. *Гомоморфизмом модуля X в Y степени r* называют любое семейство $f = (f_n)$ гомоморфизмов A-модулей $f_n : X_n \to X_{n+r}$. Если $r = 0$, то говорят, что f есть *гомоморфизм* модуля X в Y[1]). Естественным

[1]) Аналогичная терминология используется в дальнейшем для биградуированных модулей. Так, элементы группы X_{pq} в биградуированном модуле $X = (X_{pq})_{p, q \in \mathbf{Z}}$ называются элементами *бистепени* (p, q). Число $p + q$ называется *полной степенью* элемента из X_{pq}. Далее, если X и Y — два биградуированных модуля, то *гомоморфизмом бистепени* (r, s) *модуля* X *в* Y называется семейство $f = (f_{pq})$ гомоморфизмов $f_{pq}: X_{pq} \to X_{p+r, q+s}$. — *Прим. ред.*

образом определяются сумма двух гомоморфизмов $X \to Y$ одинаковой степени и композиция гомоморфизма $X \to Y$ степени r и гомоморфизма $Y \to Z$ степени s. Если каждой паре X, Y левых градуированных A-модулей сопоставить абелеву группу $\mathrm{Hom}(X, Y)$, образованную гомоморфизмами (степени 0) модуля X в Y, то на совокупности левых градуированных A-модулей получим, очевидно, структуру *абелевой категории.*

Комплексом над основным кольцом A называют градуированный A-модуль X со структурой, заданной таким гомоморфизмом $d: X \to X$ степени r, что $d \circ d = 0$. Отметим два наиболее важных случая.

Цепные комплексы. Предположим, что $X_n = 0$ для $n < 0$ и что d имеет степень -1. Из „геометрических" соображений элементы модуля X_n называют цепями размерности n в X, а d — граничным оператором. Элемент $x \in X_n$ называется *циклом*, если $dx = 0$, и *границей*, если существует такой $x' \in X_{n+1}$, что $x = dx'$. Циклы в X_n образуют подмодуль $Z_n(X)$, а границы — подмодуль $B_n(X)$. *Группой гомологий комплекса X размерности n* называют фактормодуль

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

Коцепные комплексы. Предположим, что $X_n = 0$ для $n < 0$ и что d имеет степень $+1$. В этом случае обычно пишут X^n вместо X_n и говорят о коцепях, коциклах, кограницах степени n вместо цепей, циклов и границ размерности n. Полагая

$$Z^n(X) = \mathrm{Ker}\left(X^n \xrightarrow{d} X^{n+1}\right), \quad B^n(X) = \mathrm{Im}\left(X^{n-1} \xrightarrow{d} X^n\right),$$

определяют *группы когомологий*

$$H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X).$$

Для произвольного комплекса $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, так же как и для цепного комплекса, определяют модули $Z_n(X)$, $B_n(X)$ и $H_n(X)$. Обычно полагают $H_*(X) = (H_n(X))_{n \in \mathbf{Z}}$.

Если даны два комплекса X и Y левых A-модулей, дифференциалы d в которых имеют одинаковую степень, то *гомоморфизмом* комплекса X в Y называют любой гомоморфизм градуированных A-модулей, совместимый с операторами d в X и Y. Сумма и композиция таких гомоморфизмов определяются очевидным образом, так что комплексы левых A-модулей, имеющие дифференциалы d одной и той же заданной степени, образуют, как легко видеть, *абелеву категорию.* На этой категории отображения $X \to H_n(X)$ являются аддитивными ковариантными функторами со значениями в категории левых A-модулей. Если X и Y — цепные (соответственно коцепные) комплексы, то гомоморфизмы $H_n(X) \to H_n(Y)$ [соответственно $H^n(X) \to H^n(Y)$], отвечающие гомоморфизму $f: X \to Y$, обычно обо-

значают через f_* (соответственно f^*) вместо $H_n(f)$ [соответственно $H^n(f)$].

Пусть

$$0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$$

— точная последовательность комплексов, дифференциалы которых имеют степень r. Тогда при помощи конструкции, подобной конструкции из п. 1, можно определить гомоморфизмы

$$\partial : H_n(X'') \to H_{n+r}(X'),$$

так что имеют место $|r|$ точных последовательностей

$$\ldots \to H_n(X') \xrightarrow{f_*} H_n(X) \xrightarrow{g_*} H_n(X'') \xrightarrow{\partial} H_{n+r}(X') \xrightarrow{f_*} \ldots .$$

В частности, если речь идет о точной последовательности *цепных комплексов*, то получаем *точную последовательность гомологий*

$$\boxed{\begin{array}{l} \ldots \to H_n(X') \to H_n(X) \to H_n(X'') \to H_{n-1}(X') \to \ldots \\ \ldots \to H_1(X'') \to H_0(X') \to H_0(X) \to H_0(X'') \to 0, \end{array}}$$

а для *коцепных комплексов* получаем *точную последовательность когомологий*

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \to H^0(X') \to H^0(X) \to H^0(X'') \to H^1(X') \to \ldots \\ \ldots \to H^n(X') \to H^n(X) \to H^n(X'') \to H^{n+1}(X') \to \ldots . \end{array}}$$

Пусть X — комплекс левых A-модулей и L — правый A-модуль. Тогда градуированную группу $L \underset{A}{\otimes} X$ можно снабдить структурой комплекса, используя гомоморфизмы

$$1 \otimes d : L \otimes X_n \to L \otimes X_{n+r}.$$

Имеем, очевидно, канонические гомоморфизмы

$$L \underset{A}{\otimes} H_n(X) \to H_n(L \underset{A}{\otimes} X).$$

Аналогично эндоморфизм градуированной группы $\mathrm{Hom}_A(X, L)$, где L — левый A-модуль, полученный из d при помощи транспонирования, является дифференциалом степени $-r$, если d имеет степень r.

В частности, пусть X — цепной комплекс над кольцом целых чисел. Если задана абелева группа L, то группы гомологий цепного комплекса $X \otimes L$ часто обозначают через $H_n(X; L)$, а группы когомологий коцепного комплекса $\mathrm{Hom}(X, L)$ — через $H^n(X; L)$.

2.3. Комплексы с дополнениями. Резольвенты.

Пусть X—цепной (соответственно коцепной) комплекс над основным кольцом A. *Дополнением* комплекса X называют гомоморфизм A-модулей $\varepsilon : X_0 \to A$ (соответственно $\varepsilon : A \to X^0$), такой, что $\varepsilon \circ d = 0$ (соответственно $d \circ \varepsilon = 0$). *Комплексом с дополнением* называют комплекс, снабженный некоторым дополнением.

Ясно, что для заданного цепного (соответственно коцепного) комплекса X с дополнением существует канонический гомоморфизм

$$H_0(X) \to A \quad [\text{соответственно } A \to H^0(X)].$$

Говорят, что комплекс X *ацикличен*, если этот гомоморфизм является *изоморфизмом* и если, кроме того, $H_n(X) = 0$ [соответственно $H^n(X) = 0$] для всех $n \geqslant 1$. Это значит, что последовательность

$$\ldots \to X_1 \xrightarrow{d} X_0 \to A \to 0$$

(соответственно

$$0 \to A \to X^0 \xrightarrow{d} X^1 \to \ldots)$$

является *точной*.

Если X — цепной комплекс с дополнением, то можно определить новый комплекс $\hat{X}$ следующим образом:

$$\hat{X}_n = \begin{cases} X_n & \text{для } n \geqslant 0, \\ A & \text{для } n = -1, \\ 0 & \text{для } n < -1, \end{cases}$$

причем дифференциал в $\hat{X}$ совпадает с дифференциалом X в размерности $n \geqslant 1$ и с дополнением ε в размерности 0. Ацикличность комплекса X означает, что *все* производные группы комплекса $\hat{X}$ тривиальны. Аналогичный результат справедлив для коцепных комплексов с дополнениями.

Отметим, наконец, понятие *гомоморфизма* для комплексов с дополнением: это гомоморфизм комплексов, совместимый с заданными дополнениями.

Понятие ациклического комплекса с дополнением обобщается следующим образом. Пусть L — левый A-модуль. *Гомологической резольвентой* модуля L называют любую *точную последовательность* левых A-модулей вида

$$\ldots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to L \to 0.$$

В этом случае градуированный модуль $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, снабженный дифференциалом, который совпадает с гомоморфизмами $X_n \to X_{n-1}$

для $n \geqslant 1$ и равен 0 в размерности 0, является цепным комплексом. Он имеет следующие группы гомологий:

$$H_n(X) = 0 \text{ для } n \geqslant 1, \ H_0(X) = L.$$

Аналогично *когомологической резольвентой* модуля L называют любую точную последовательность

$$0 \to L \to X^0 \to X^1 \to X^2 \to \ldots .$$

В этом случае $X = (X^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ есть коцепной комплекс и

$$H^n(X) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \ H^0(X) = L.$$

Поэтому ацикличный цепной (соответственно коцепной) комплекс с дополнением является гомологической (соответственно когомологической) резольвентой A-модуля A.

Для построения гомологической резольвенты модуля L напишем

$$L = X_0/R_0, \quad R_0 = X_1/R_1, \quad R_1 = X_2/R_2, \ \ldots .$$

Определим гомоморфизм $X_0 \to L$ естественным образом, а гомоморфизм $X_n \to X_{n-1}$ — как композицию эпиморфизма $X_n \to R_{n-1}$ и вложения $R_{n-1} \to X_{n-1}$. Аналогичный метод применим для построения когомологических резольвент модуля L.

Пусть L и M — A-модули; рассмотрим гомологические резольвенты модулей L и M:

$$\ldots \to X_1 \to X_0 \to L \to 0,$$
$$\ldots \to Y_1 \to Y_0 \to M \to 0.$$

Пусть задан гомоморфизм $f : L \to M$. Тогда говорят, что гомоморфизм комплексов $g : X \to Y$ *совместим с* f, если диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Разумеется, если заданы X, Y и f, то не всегда можно построить гомоморфизм $g : X \to Y$, совместимый с f.

Аналогичное понятие имеется для когомологических резольвент.

2.4. Операторы гомотопии.

Пусть X и Y — дифференциальные A-модули и

$$f_0, f_1 : X \to Y$$

— некоторые гомоморфизмы. Говорят, что f_0 и f_1 *гомотопны*, если существует такое A-линейное отображение $h : X \to Y$, что

$$f_1 - f_0 = h \circ d + d \circ h.$$

Если $dx=0$, то $f_1(x)-f_0(x)=d(h(x))$. Следовательно, *гомоморфизмы* $H(X)\to H(Y)$, *определенные гомоморфизмами* f_0 *и* f_1, *совпадают.*

Отметим, что, как легко видеть, отношение „f_0 и f_1 гомотопны" является *отношением эквивалентности.*

Говорят, что два дифференциальных A-модуля X и Y *гомотопно эквивалентны*, если существуют такие гомоморфизмы $f: X\to Y$ и $g: Y\to X$, что $f\circ g$ и $g\circ f$ гомотопны тождественным изоморфизмам. В этом случае производные модули модулей X и Y изоморфны. Говорят, в частности, что дифференциальный A-модуль X *гомотопен нулю* (или *гомотопно тривиален*), если эндоморфизмы 1 и 0 в X гомотопны. Очевидно, что в этом случае $H(X)=0$, но обратное утверждение неверно. Имеется, однако, следующий результат.

Теорема 2.4.1. *Пусть X — левый дифференциальный A-модуль. Для того чтобы X был гомотопно тривиален, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух следующих эквивалентных условий:*

(a) $H(X)=0$ *и* $Z(X)$ — *прямое слагаемое в* X;

(b) *для произвольного левого A-модуля L дифференциальная группа* $\operatorname{Hom}_A(X, L)$ *ациклична* [1]).

Предположим, что X гомотопно тривиален. Ясно, что в этом случае $H(X)=0$ и что $\operatorname{Hom}(X, L)$ гомотопно тривиальна и, следовательно, ациклична. Для $u\in\operatorname{Hom}(X, L)$ отношение $du=0$ означает, что u равен нулю на $B(X)=Z(X)$, а существование элемента $v\in\operatorname{Hom}(X, L)$, для которого $u=dv$, т. е. $u=v\circ d$, означает, что гомоморфизм $v: Z(X)\to L$, определенный (однозначно, если $du=0$) равенством $v(dx)=u(x)$, можно продолжить на X. Следовательно, если X гомотопно тривиален, то, сопоставляя каждому $v: Z(X)\to L$ гомоморфизм $u=v\circ d: X\to L$, мы видим, что любой гомоморфизм $Z(X)\to L$ продолжается на X, а это значит, что $Z(X)$ есть прямое слагаемое в X.

Обратно, предположим, что (a) справедливо. Пусть $M\subset X$ — дополнение к $Z(X)$ в X. Каждый $x\in X$ записывается в виде $x=m+dy$ и, следовательно, в виде $x=m+dm'$, где $m, m'\in M$ однозначно определяются элементом x. Полагая $m'=h(x)$, мы видим, что

$$1=h\circ d+d\circ h.$$

Точно так же, если выполнено условие (b), то рассуждения, использованные при доказательстве необходимости, показывают, что любой гомоморфизм $X\to L$, равный нулю на $B(X)$, имеет вид $v\circ d$, где $v: X\to L$, и, следовательно, равен нулю на $Z(X)$. Отсюда вытекает, что $B(X)=Z(X)$. Кроме того, рассуждения, аналогичные

[1]) Дифференциальная группа Y называется *ацикличной*, если $H(Y)=0$. — *Прим. ред.*

приведенным выше, показывают, что любой гомоморфизм $Z(X) \to L$ можно продолжить на X, откуда следует, что $Z(X)$ является прямым слагаемым в X. Теорема доказана.

Пусть теперь X и Y — два комплекса левых A-модулей, дифференциалы которых имеют степень r. Два гомоморфизма $f_0, f_1 : X \to Y$ называются гомотопными, если существует такой гомоморфизм градуированных модулей $h : X \to Y$ степени $-r$, что

$$f_1 - f_0 = h \circ d + d \circ h.$$

Ясно, что в этом случае гомоморфизмы $H_n(X) \to H_n(Y)$, определенные гомоморфизмами f_0 и f_1, равны.

Очевидно, что теорема 2.4.1 с тривиальными изменениями распространяется на комплексы A-модулей.

2.5. Теорема об ацикличных моделях.

В этом пункте мы будем называть *комплексом* любой комплекс левых A-модулей, в котором дифференциал d имеет степень -1. Будем говорить, что комплекс X *ацикличен в размерности* n, *если* $H_n(X) = 0$, и *ацикличен*, если он ацикличен в каждой размерности. Очевидно, комплексы образуют абелеву категорию.

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория. Мы будем рассматривать ковариантные функторы, определенные на $\mathfrak{K}$, со значениями в категории комплексов. Любой такой функтор F отождествляется с последовательностью (F_n) ковариантных функторов со значениями в категории левых A-модулей, последовательностью, наделенной такими гомоморфизмами функторов $d_n : F_n \to F_{n-1}$, что $d_{n-1} \circ d_n = 0$ при всех n.

Предположим, что раз и навсегда выбрано какое-то *множество* $\mathfrak{M}$ объектов из $\mathfrak{K}$. Пару $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ мы будем называть *категорией с моделями*, а элементы $X \in \mathfrak{M}$ — *моделями* этой категории.

Ковариантный функтор F, определенный на $\mathfrak{K}$, со значениями в категории комплексов называют *ацикличным в размерности* n, если комплекс $F(X)$ ацикличен в размерности n для каждой *модели* $X \in \mathfrak{M}$.

С другой стороны, ковариантный функтор G, определенный на $\mathfrak{K}$, со значениями в категории левых A-модулей называют *представительным*[1]), если выполнено следующее условие: *для каждого* $M \in \mathfrak{M}$ *существует такое множество* $B_M \subset G(M)$, *что для любого* $X \in \mathfrak{K}$ A-модуль $G(X)$ *допускает в качестве базиса семейство элементов*

$$G(u)\, m,$$

[1]) Это определение является немного менее общим, чем определение Эйленберга и Маклейна; однако оно достаточно для всех приложений, которые мы имеем в виду.

где m пробегает различные множества B_M, а u для $m \in B_M$ пробегает множество $\mathrm{Hom}(M, X)$. Это значит, что каждый $x \in G(X)$ имеет единственное разложение вида

$$x = \sum \lambda_i \cdot G(u_i)\, m_i,$$

где $m_i \in B_{M_i}$, $u_i \in \mathrm{Hom}(M_i, X)$, $\lambda_i \in A$.

Таким образом, если G представителен, то для каждого $X \in \mathfrak{K}$ имеется канонически определенный базис модуля $G(X)$ и любой гомоморфизм $X \to Y$ переводит базис $G(X)$ в базис $G(Y)$.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ — *категория с моделями*; F, G — *два ковариантных функтора, определенных на* $\mathfrak{K}$, *со значениями в категории комплексов. Предположим, что функтор* F_p *представителен, а функтор* G *ацикличен в размерности* q, *где* p *и* q — *заданные целые числа. Тогда для любого гомоморфизма* $T: F_p \to G_q$, *удовлетворяющего условию* $d \circ T = 0$, *существует такой гомоморфизм* $T': F_p \to G_{q+1}$, *что* $T = d \circ T'$.

Для построения гомоморфизма

$$T'(X): F_p(X) \to G_{q+1}(X)$$

достаточно определить его на базисе A-модуля $F_p(X)$. По предположению, для каждого $M \in \mathfrak{M}$ существует такое множество $B_M \subset F_p(M)$, что $F_p(X)$ допускает в качестве базиса семейство элементов $F_p(u)\, m$ ($m \in B_M$, $M \in \mathfrak{M}$, $u \in \mathrm{Hom}(M, X)$). Поэтому достаточно определить $T'(X)$ на элементах этого типа, и при этом значения $T'(X)$ на этих элементах можно выбирать произвольно. Но так как T' должен быть *естественным преобразованием*, то

$$T'(X)\, F_p(u)\, m = G_{q+1}(u)\, T'(M)\, m.$$

Следовательно, достаточно выбрать элементы $T'(M)\, m \in G_{q+1}(M)$. Они должны подчиняться *единственному* условию

$$d(T'(M)\, m) = T(M)\, m.$$

Остается показать, что можно эффективно выбрать в $G_{q+1}(M)$ элемент, удовлетворяющий этому условию; но это очевидно, так как, по предположению,

$$d(T(M)\, m) = 0, \quad H_q(G(M)) = 0.$$

Итак, теорема доказана.

Эта теорема имеет важные следствия, главное из которых мы сейчас рассмотрим.

Пусть на $\mathfrak{K}$ заданы два ковариантных функтора F и G со значениями в категории *цепных комплексов* над основным кольцом A. Для каждого целого n мы рассмотрим ковариантные функторы

$$H_n(F): X \to H_n(F(X)),$$

$$H_n(G): X \to H_n(G(X)),$$

Если $T: F \to G$ — гомоморфизм, то он определяет, очевидно, гомоморфизмы $T_*: H_n(F) \to H_n(G)$.

С другой стороны, мы скажем, что два гомоморфизма $T_0, T_1 : F \to G$ *гомотопны*, если для каждого n существует такой гомоморфизм $D_n : F_n \to G_{n+1}$, что $T_1 - T_0 = d \circ D_n + D_{n-1} \circ d$ в степени n. Ясно, что производные гомоморфизмы $H_n(F) \to H_n(G)$, определенные гомоморфизмами T_0 и T_1, совпадают.

Предположим, наконец, что в $\mathfrak{K}$ задано множество моделей $\mathfrak{M}$. Мы будем говорить, что F *представителен*, если каждый функтор $F_n (n \geqslant 0)$ представителен, и что G *ацикличен*, если $H_n(G(M)) = 0$ для всех $n \geqslant 1$ и $M \in \mathfrak{K}$.

Теорема 2.5.2. *Пусть $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ — категория с моделями, F и G — ковариантные функторы на $\mathfrak{K}$ со значениями в категории цепных комплексов над кольцом A. Предположим, что F представителен, а G ацикличен. Тогда любой гомоморфизм $H_0(F) \to H_0(G)$ определяется некоторым гомоморфизмом $F \to G$, единственным с точностью до гомотопии.*

Действительно, рассмотрим функтор $\hat{G}$ со значениями в категории комплексов, который определим следующим образом:

$$\hat{G}_n = \begin{cases} G_n & \text{для } n \geqslant 0, \\ H_0(G) & \text{для } n = -1, \\ 0 & \text{для } n < -1, \end{cases}$$

причем дифференциал в $\hat{G}$ совпадает с дифференциалом G в размерности $n \geqslant 1$ и с каноническим гомоморфизмом $\pi_G : G_0 \to H_0(G)$ в размерности 0. Очевидно, функтор $\hat{G}$ ацикличен во *всех* размерностях.

Возьмем затем гомоморфизм

$$U : H_0(F) \to H_0(G)$$

и рассмотрим его композицию с каноническим гомоморфизмом $\pi_F : F_0 \to H_0(F)$. Получаем естественное преобразование

$$U \circ \pi_F : F_0 \to \hat{G}_{-1},$$

очевидно, аннулируемое дифференциалом d. Так как F_0 представителен, а $\hat{G}$ ацикличен, то существует такой гомоморфизм

$$T_0 : F_0 \to G_0,$$

что $U \circ \pi_F = \pi_G \circ T_0$. Рассмотрим теперь

$$T_0 \circ d : F_1 \to G_0.$$

Этот гомоморфизм аннулируется дифференциалом d. То же самое рассуждение доказывает существование такого гомоморфизма $T_1 : F_1 \to G_1$, что

$$T_0 \circ d = d \circ T_1.$$

Ясно, что, неограниченно продолжая эту конструкцию, мы получим гомоморфизм $F \to G$, индуцирующий U.

Остается показать, что если гомоморфизм $T : F \to G$ индуцирует 0 на гомологиях в размерности 0, то он гомотопен 0. Так как $d \circ T_0 = 0$, то предыдущая теорема обеспечивает существование такого гомоморфизма $D_0 : F_0 \to G_1$, что $T_0 = d \circ D_0$. Поэтому $d \circ (T_1 - D_0 \circ d) = 0$, откуда следует существование такого $D_1 : F_1 \to G_2$, что $T_1 - D_0 \circ d = d \circ D_1$, и т. д.

Следствие. *Пусть $(\mathfrak{K}, \mathfrak{M})$ — категория с моделями, F, G — два ковариантных функтора на $\mathfrak{K}$ со значениями в категории цепных комплексов над основным кольцом A. Предположим, что F и G представительны и ацикличны и что функторы $H_0(F)$ и $H_0(G)$ изоморфны. Тогда F и G гомотопно эквивалентны.*

В частности, для каждого $X \in \mathfrak{K}$ комплексы $F(X)$ и $G(X)$ имеют одни и те же гомологии во всех размерностях.

Мы предлагаем читателю осмыслить предыдущие результаты в случае, когда категория $\mathfrak{K}$ состоит только из *одного* объекта.

2.6. Двойные комплексы.

Двойным комплексом над основным кольцом A называют биградуированный A-модуль $X = (X_{pq})_{p,\,q \in \mathbf{Z}}$ со структурой, заданной гомоморфизмами

$$d' : X_{pq} \to X_{p+r,\,q}, \qquad d'' : X_{pq} \to X_{p,\,q+r},$$

которые удовлетворяют условиям

$$d'd' = d''d'' = d'd'' + d''d' = 0.$$

В этом случае можно построить следующий (простой) комплекс: его компонента степени n есть

$$X_n = \sum_{p+q=n} X_{pq},$$

а дифференциал

$$d : X_n \to X_{n+r}$$

определяется равенством $d = d' + d''$. Производные модули этого комплекса обозначаются через $H_n(X)$.

Кроме того, отправляясь от X, можно построить два других комплекса. Первый, обозначаемый через $'X$, имеет однородными компонентами модули

$$'X_n = \sum_q X_{nq}$$

и снабжен дифференциалом d'. Его производные модули обозначают через $'H_n(X)$. Второй комплекс, обозначаемый через $''X$, в качестве однородных компонент имеет модули

$$''X_n = \sum_p X_{pn}$$

и снабжен дифференциалом d''. Производные модули комплекса $''X$ обозначают через $''H_n(X)$.

Заметим, что каждый модуль $'H_p(X)$ допускает разложение в прямую сумму

$$'H_p(X) = \sum_q {}'H_p(''X_q),$$

где $'H_p(''X_q)$ есть производный модуль в размерности p комплекса, образованного градуированным модулем $(X_{pq})_{p \in \mathbf{Z}}$ и дифференциалом d'. Кроме того, дифференциал d'', коммутирующий с d' с точностью до знака, индуцирует гомоморфизмы

$$d''_* : {}'H_p(''X_q) \to {}'H_p(''X_{q+r}),$$

которые позволяют образовать комплекс из модулей $'H_p(''X_q)$ (p фиксировано, q меняется). Производный модуль размерности q этого комплекса обозначается через

$$''H_q('H_p(X)).$$

Аналогично определяются модули

$$'H_p(''H_q(X)).$$

Двойным цепным комплексом называют двойной комплекс X, у которого $r = -1$ и $X_{pq} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$. *Двойным коцепным комплексом* называют двойной комплекс X, у которого $r = +1$, а $X_{pq} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$. В этом случае пишут X^{pq} вместо X_{pq} и т. д.

Отметим, что понятие двойного комплекса имеет смысл в любой абелевой категории, но в общем случае нельзя определить члены $H_n(X)$. Чтобы определить эти объекты, нужно допустить, что в рассматриваемой категории можно образовывать бесконечные прямые суммы, или же ограничиться только лишь двойными комплексами, у которых суммы

$$\sum_{p+q=n} X_{pq}$$

конечны (как, например, у цепных или коцепных двойных комплексов).

2.7. Тензорное произведение двух комплексов.

Рассмотрим комплекс X правых A-модулей и комплекс Y левых A-модулей над некоторым основным кольцом A, дифференциалы которых имеют степень -1. Образуем биградуированную группу

$$X \underset{A}{\otimes} Y = (X_p \underset{A}{\otimes} Y_q)_{p, q \in \mathbf{Z}}$$

и определим на ней два дифференциала, полагая

$$d'(a \otimes b) = da \otimes b,$$
$$d''(a \otimes b) = (-1)^p a \otimes db,$$

где a имеет степень p. Немедленно проверяется, что при этом $X \otimes Y$ становится двойным комплексом, полный дифференциал которого задается формулой

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^p a \otimes db, \text{ где } a \text{ имеет степень } p. \quad (1)$$

Если X и Y — цепные комплексы, то $X \otimes Y$ — двойной цепной комплекс.

Имеются канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H_p(X) \underset{A}{\otimes} H_q(Y) \to H_{p+q}(X \underset{A}{\otimes} Y),} \quad (2)$$

определяемые следующим образом. Возьмем классы $\xi \in H_p(X)$ и $\eta \in H_q(Y)$ и представим их циклами $a \in X_p$ и $b \in Y_q$. Из (1) следует, что $a \otimes b$ есть цикл степени $p+q$, определяющий элемент из группы $H_{p+q}(X \otimes Y)$. Последний не зависит от выбора циклов a и b. Действительно, при любом другом возможном выборе представители классов ξ и η имеют вид $a + da'$, $b + db'$, и, так как $da = db = 0$, то

$$(a + da') \otimes (b + db') = a \otimes b + d\left(a' \otimes b + a' \otimes db' + (-1)^p a \otimes b'\right),$$

если a имеет степень p. Отсюда следует наше утверждение. Заметив это, определим (2) как гомоморфизм, отображающий $\xi \otimes \eta$ в класс цикла $a \otimes b$.

Гомоморфизм (2) определяет естественные гомоморфизмы

$$\sum_{p+q=n} H_p(X) \underset{A}{\otimes} H_q(Y) \to H_n(X \underset{A}{\otimes} Y). \quad (3)$$

Значит, если наделить тензорное произведение $H_*(X) \otimes H_*(Y)$ его полной градуировкой, то получим гомоморфизм *градуированных* групп

$$H_*(X) \otimes H_*(Y) \to H_*(X \otimes Y).$$

Этот гомоморфизм не является, вообще говоря, изоморфизмом. Мы изучим его более детально в § 5.

Если, однако, X и Y гомотопно тривиальны, то тем же свойством обладает и комплекс $X \otimes Y$ (наделенный „полной“ градуировкой и „полным“ дифференциалом). Доказательство очевидно. В этом случае ясно, что гомоморфизмы (3) являются изоморфизмами.

2.8. Комплексы гомоморфизмов.

Пусть X и Y — два комплекса левых A-модулей. Предположим, что дифференциал в X имеет степень -1, а дифференциал в Y — степень $+1$. Полагаем, по определению,

$$\operatorname{Hom}_A(X, Y) = \left(\operatorname{Hom}_A\left(X_p, Y^q\right)\right)_{p,\, q \in \mathbf{Z}}.$$

Ясно, что $\operatorname{Hom}(X, Y)$ есть биградуированная группа. Мы наделим ее дифференциалами d' и d'', чтобы получить двойной комплекс. Если $u: X_p \to Y^q$, то мы полагаем

$$d'u = u \circ d; \quad d''u = (-1)^{p+q+1} d \circ u.$$

Непосредственно видно, что d' и d'' имеют бистепени $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и что $d'd'' + d''d' = 0$.

Отметим, что для $x \in X$ и $u: X_p \to Y^q$ имеем

$$d(u(x)) = (-1)^{p+q+1}(du)(x) + (-1)^{p+q} u(dx)$$

(разумеется, нужно считать, что $u = 0$ на X_r для $r \neq p$). Так как u имеет полную степень $p+q$ в двойном комплексе $\operatorname{Hom}(X, Y)$, то это равенство показывает, что каноническое отображение

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \otimes X \to Y,$$

определенное формулой $u \otimes x \to u(x)$, есть гомоморфизм комплексов, если, конечно, наделить $\operatorname{Hom}(X, Y)$ полной градуировкой и полным дифференциалом. Это оправдывает введенные выше формулы.

Покажем теперь, что имеются канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H^{p+q}(\operatorname{Hom}(X, Y)) \to \operatorname{Hom}\left(H_p(X), H^q(Y)\right).}$$

Для этого возьмем класс гомологий степени $p+q$ в $\operatorname{Hom}(X, Y)$ и представим его циклом u полной степени $p+q$. Обозначая через $u^{rs}: X_r \to Y^s$ компоненту элемента u бистепени (r, s), будем иметь, так как $du = 0$, соотношение

$$\ldots + du^{p+1, q-1} + du^{p, q} + du^{p-1, q+1} + \ldots = 0,$$

Поскольку

$$du^{r,s} = u^{r,s} \circ d + (-1)^{r+s+1} d \circ u^{r,s},$$

то, беря компоненты бистепеней $(p+1, q)$ и $(p, q+1)$ в написанном выше соотношении $du=0$, приходим к следующим равенствам:

$$u^{p,q} \circ d + (-1)^{p+q+1} d \circ u^{p+1,q-1} = 0,$$
$$u^{p-1,q+1} \circ d + (-1)^{p+q+1} d \circ u^{p,q} = 0.$$

Отсюда следует, что u^{pq} отображает $Z_p(X)$ в $Z^q(Y)$ и $B_p(X)$ в $B^q(Y)$, и поэтому при переходе к фактор-модулям определяет гомоморфизм $H_p(X) \to H^q(Y)$. Легко проверяется, что этот гомоморфизм зависит только от класса гомологий комплекса $\mathrm{Hom}(X, Y)$, представленного циклом u. Итак, требуемый гомоморфизм построен.

Разумеется, отсюда вытекают канонические гомоморфизмы

$$H^n(\mathrm{Hom}(X, Y)) \to \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}\big(H_p(X), H^q(Y)\big).$$

Как и в случае тензорных произведений, эти гомоморфизмы не являются, вообще говоря, изоморфизмами.

§ 3. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Целью этого параграфа является изучение категории комплексов, которая встречается в классической теории „симплициальных комплексов“ (гомологии триангулируемых пространств), в теории сингулярных гомологий и в теории когомологий со значениями в пучке. Все „симплициальные операции“ классической алгебраической топологии имеют смысл в этой категории, а потому понятия и результаты, которые можно выразить „симплициально“, автоматически переносятся на комплексы, которые мы намерены изучать. В частности, это относится к теории „$\cup$-произведений“.

3.1. Определения.

Через Δ_n для любого целого $n \geqslant 0$ мы будем всегда обозначать множество $\{0, 1, \ldots, n\}$ целых рациональных чисел от 0 до n, а через G_{pq} для любых $p, q \geqslant 0$ — множество отображений Δ_p в Δ_q. Очевидно, имеют место законы композиции

$$G_{pq} \times G_{qr} \to G_{pr},$$

такие, что множество, составленное из объектов $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$, можно рассматривать как *категорию* (однако мы не будем придерживаться этой чересчур педантичной точки зрения ...).

Пусть A — основное кольцо. *Симплициальным цепным комплексом* над A мы будем называть произвольный градуированный A-модуль $X_* = (X_n)_{n \geqslant 0}$ со следующей структурой. Каковы бы ни были p, q и $f \in G_{pq}$, имеется такой гомоморфизм

$$\overline{f} : X_q \to X_p,$$

что выполнены условия: *если* f *тождественно, то* $\overline{f}$ — *тождественный гомоморфизм*; *если* $f = g \circ h$, *то* $\overline{f} = \overline{h} \circ \overline{g}$. Читателю предлагается интерпретировать это определение на языке функторов. Мы часто будем говорить, что гомоморфизмы вида $\overline{f}$ являются *операторами граней* в X_*.

Аналогично, симплициальным коцепным комплексом над A называют произвольный градуированный A-модуль $X^* = (X^n)_{n \geqslant 0}$, в котором для любых p, q и $f \in G_{pq}$ определен гомоморфизм

$\bar{f}: X^p \to X^q$, удовлетворяющий условиям совместимости, подобным тем, которые мы сформулировали выше.

Если X_* есть симплициальный цепной комплекс над A, образованный левыми A-модулями, то на градуированной группе $\mathrm{Hom}(X_*, L)$ для любого левого A-модуля L определяется естественным способом структура симплициального коцепного комплекса, и для любого правого A-модуля L градуированная группа $L \underset{A}{\otimes} X_*$ является симплициальным цепным комплексом.

Очевидным образом определяют понятие *гомоморфизма* симплициальных цепных (соответственно коцепных) комплексов. Такой гомоморфизм является однородным степени 0 отображением, совместимым с операторами граней рассматриваемых комплексов. Легко заметить, что симплициальные цепные (соответственно коцепные) комплексы над заданным основным кольцом A образуют *абелеву категорию*.

Базисным симплициальным цепным комплексом над A называют произвольный симплициальный цепной комплекс X_* над A со следующей дополнительной структурой. Для каждого n задан *базис* A-модуля X_n, элементы которого называют *n-мерными симплексами* комплекса X_*; при этом предполагают, что „грани“ симплекса из X_* всегда являются симплексами комплекса X_*. Для такого комплекса имеется каноническое *дополнение* $X_0 \to A$, а именно то, которое принимает значение 1 на каждом 0-мерном симплексе комплекса X_*.

В предыдущих определениях множество G_{pq} для любых p и q можно заменить его подмножеством G_{pq}^+, которое состоит из *возрастающих* (*в широком смысле*) отображений множества Δ_p в Δ_q. В этом случае получается понятие *полусимплициального*[1]) *цепного* (соответственно коцепного) комплекса.

Заметим, с другой стороны, что определения, которые мы ввели в этом пункте, распространяются на случай, когда категория абелевых групп заменена произвольной *абелевой категорией* $\mathfrak{K}$. Например, полусимплициальный цепной (соответственно коцепной) комплекс в $\mathfrak{K}$ есть контравариантный (соответственно ковариантный) функтор $\Delta^+ \to \mathfrak{K}$, где через Δ^+ обозначена категория, объектами которой являются множества Δ_n $(n = 0, 1, \ldots)$, а гомоморфизмами $\Delta_p \to \Delta_q$ — возрастающие отображения Δ_p в Δ_q. Излишне даже предполагать категорию $\mathfrak{K}$ абелевой. Например, если $\mathfrak{K}$ — категория множеств, то контравариантные функторы $\Delta^+ \to \mathfrak{K}$ являются не чем иным, как „полусимплициальными комплексами“ Эйленберга и Зильбера.

Мы дадим теперь несколько важных примеров цепных и коцепных симплициальных комплексов.

[1]) Для неискушенного читателя может быть полезным следующее замечание: полусимплициальные комплексы в настоящее время играют в топологии роль, значительно более важную, чем симплициальные комплексы, хотя это и не следует из примеров, данных в настоящем параграфе. В этом можно будет убедиться в гл. II, § 6.

3.2. Цепи симплициальной схемы.

Симплициальной схемой (в классической терминологии это *симплициальный комплекс*, но мы имеем серьезные основания перейти к другому термину[1])) называют произвольное множество K со структурой, определенной заданием множества таких *конечных* и *непустых* подмножеств множества K, называемых *симплексами* схемы K, что *любое конечное и непустое подмножество симплекса из K является снова симплексом из K.*

Пусть, например, $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ — покрытие произвольного множества X. Будем говорить, что конечное и непустое подмножество S множества I есть симплекс, если множество

$$M_S = \bigcap_{i \in S} M_i$$

непусто. Тем самым на множестве индексов I определяется структура симплициальной схемы, и множество I, рассматриваемое с этой структурой, называется *нервом* покрытия $\mathfrak{M}$.

Другой пример, впрочем тривиальный, получается, когда $K = \Delta_n$, и каждое непустое подмножество в Δ_n есть симплекс. Так получается *стандартная симплициальная схема размерности n.*

Пусть K и L — две симплициальные схемы; говорят, что L есть *симплициальная подсхема* схемы K, если $L \subset K$ и если каждый симплекс из L есть симплекс схемы K. Например, объединение ${}^nK$ симплексов схемы K размерности $\leqslant n$ (т. е. состоящих не более чем из $n+1$ элементов) является симплициальной подсхемой в K, если условиться, что симплексами схемы ${}^nK$ являются симплексы из K размерности $\leqslant n$. Так получается *n-мерный остов схемы K.*

Гомоморфизмом (или *симплициальным отображением*) симплициальной схемы K в симплициальную схему L называют произвольное отображение $K \to L$, которое переводит каждый симплекс схемы K в симплекс схемы L. Ясно, что это определение дает возможность говорить о *категории* симплициальных схем.

Пусть K — симплициальная схема. Мы будем называть *n-мерным сингулярным симплексом*[2]) *схемы K* любое симплициальное отображение

$$s : \Delta_n \to K$$

[1]) В нашей литературе применяется термин „абстрактный комплекс". — *Прим. перев.*

[2]) Мы применяем эту неортодоксальную терминологию для того, чтобы, с одной стороны, избежать смешения с понятием *симплекса* (симплекс — это просто *подмножество* из K), а с другой стороны — оттенить аналогию рассматриваемого понятия с понятием сингулярного симплекса топологического пространства, которое будет введено в п. 3.4.

или, что то же самое, любую последовательность $s = (x_0, \ldots, x_n)$ точек из K, принадлежащих одному и тому же симплексу схемы K[1]). Пусть s — q-мерный сингулярный симплекс схемы K и $f: \Delta_p \to \Delta_q$. Тогда через $\overline{f}(s)$ мы будем обозначать p-мерный сингулярный симплекс $s \circ f : \Delta_p \to K$ в K.

Обозначим теперь через $C_n(K)$ свободную абелеву группу, имеющую базисом множество n-мерных сингулярных симплексов схемы K. Любое отображение $f: \Delta_p \to \Delta_q$ определяет, согласно сказанному выше, гомоморфизм $\overline{f}: C_q(K) \to C_p(K)$, который, очевидно, является „мультипликативной“ функцией от f. Если теперь обозначить через $C_*(K)$ градуированную абелеву группу, составленную из последовательности $C_n(K)$, то на $C_*(K)$ мы получаем структуру *базисного симплициального цепного комплекса* над кольцом целых рациональных чисел.

Вообще, если задана произвольная абелева группа A, то можно положить

$$C_n(K; A) = C_n(K) \otimes A$$

и обозначить через $C_*(K; A)$ градуированную группу, образованную группами $C_n(K; A)$. Элементы группы $C_n(K; A)$ называются *n-мерными сингулярными цепями схемы K с коэффициентами из A*. Их можно также определить как формальные линейные комбинации n-мерных сингулярных симплексов схемы K с коэффициентами из A.

Аналогично определяют

$$C^n(K; A) = \mathrm{Hom}(C_n(K), A),$$

$$C^*(K; A) = \mathrm{Hom}(C_*(K), A) = \left(C^n(K; A)\right)_{n \geqslant 0}.$$

Элементы группы $C^n(K; A)$ — это *сингулярные коцепи степени n в K со значениями в A*. Их можно определить еще как функции, заданные на множестве n-мерных сингулярных симплексов схемы K, со значениями в A.

Ясно, что $C_*(K; A)$ и $C^*(K; A)$ канонически наделены симплициальными структурами в смысле предыдущего пункта.

Если имеется симплициальное отображение $K \to L$, то естественным способом определяются гомоморфизмы симплициальных комплексов

$$C_*(K; A) \to C_*(L; A); \qquad C^*(L; A) \to C^*(K; A).$$

Поэтому $K \to C_*(K; A)$ [соответственно $K \to C^*(K; A)$] можно рассматривать как ковариантный (соответственно контравариантный) функтор, определенный на категории симплициальных схем, со значениями в категории симплициальных цепных (соответственно коцепных) комплексов.

[1]) Таким образом, сингулярный симплекс есть не что иное, как упорядоченный симплекс в обычной терминологии. — *Прим. перев.*

Пусть K — симплициальная схема и L — подсхема в K. Комплекс $C_*(L)$ отождествляется, очевидно, с некоторым симплициальным подкомплексом в $C_*(K)$. Это дает возможность образовать фактор-группу

$$C_*(K \bmod L) = C_*(K)/C_*(L),$$

которая снова является симплициальным цепным комплексом. В общем случае для всякой абелевой группы A определяют симплициальные комплексы

$$C_*(K \bmod L;\ A) = C_*(K \bmod L) \otimes A,$$
$$C^*(K \bmod L;\ A) = \mathrm{Hom}\,(C_*(K \bmod L),\ A).$$

Отсюда немедленно получаются точные последовательности

$$0 \to C_*(L;\ A) \to C_*(K;\ A) \to C_*(K \bmod L;\ A) \to 0,$$
$$0 \to C^*(K \bmod L;\ A) \to C^*(K;\ A) \to C^*(L;\ A) \to 0.$$

До сих пор мы рассматривали примеры симплициальных цепных комплексов. Теперь мы дадим в рамках теории симплициальных схем примеры полусимплициальных цепных комплексов.

Упорядоченной симплициальной схемой мы будем называть произвольную симплициальную схему K с таким отношением порядка, что каждый симплекс из K является *вполне* упорядоченным. В этом случае естественно определяется понятие *возрастающего сингулярного симплекса* схемы K (конечно, имеется в виду, что стандартные схемы Δ_n снабжены их естественным отношением порядка). Рассматривая целочисленные линейные комбинации возрастающих сингулярных симплексов схемы K, получаем очевидным образом полусимплициальный цепной комплекс $C_*^+(K)$. Имеет место включение

$$C_*^+(K) \subset C_*(K),$$

совместимое с полусимплициальными структурами рассматриваемых градуированных групп. Далее, для каждой абелевой группы A определяются очевидным способом полусимплициальный цепной комплекс $C_*^+(K;\ A)$ и полусимплициальный коцепной комплекс $C_+^*(K;\ A)$.

В заключение заметим, что любой симплициальной схеме K можно следующим образом канонически сопоставить *топологическое пространство* $P(K)$. Рассмотрим все отображения f схемы K в множество вещественных чисел, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) множество тех $x \in K$, для которых $f(x) \neq 0$, образует симплекс $|f|$ в K;

(b) $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$;

(c) $\sum\limits_{x \in K} f(x) = 1$.

Искомое пространство $P(K)$ является не чем иным, как множеством всех этих отображений с топологией, которую мы сейчас определим. Прежде всего, для каждого симплекса S из K обозначим через $P(S)$ множество таких $f \in P(K)$, что $|f| \subset S$. Если S является вершиной x из K, то ясно, что $P(S)$ сводится к единственной точке $P(x)$ из $P(K)$. В случае произвольного симплекса S множество $P(S)$ является, очевидно, выпуклой оболочкой (в векторном пространстве всех отображений $K \to \mathbf{R}$) множества точек $P(x)$ $(x \in S)$. Так как последние точки, очевидно, линейно независимы, то для n-мерного симплекса S множество $P(S)$ отождествляется (при записи вершин симплекса S в определенном порядке) с множеством J_n точек $(t_0, \ldots, t_n)$ из $\mathbf{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условиям $t_i \geqslant 0$, $\sum t_i = 1$ („стандартный геометрический симплекс размерности n", см. п. 3.4). После этого мы определим на $P(S)$ топологию симплекса J_n, что превращает $P(S)$ в компактное пространство. Будем говорить, что подмножество U множества $P(K)$ *открыто*, если $U \cap P(S)$ открыто в $P(S)$ для каждого симплекса S из K. Для двух симплексов S', S'' из K имеем, очевидно, $P(S') \cap P(S'') = P(S' \cap S'')$ и $P(S')$ и $P(S'')$ индуцируют на $P(S' \cap S'')$ топологию, определенную непосредственно на этом последнем множестве. Таким образом, топология, определенная на $P(S)$, индуцирована топологией пространства $P(K)$, и $P(S)$ являются компактными множествами в $P(K)$, которые, разумеется, покрывают $P(K)$. Говорят, что $P(K)$ есть *полиэдр*, сопоставленный схеме K.

Топологию в множестве $P(K)$ можно задать еще следующим образом. Каждый $x \in K$ определяет отображение $P(K) \to \mathbf{R}$, а именно $f \to f(x)$. Тогда топология в $P(K)$ — это наименее тонкая топология, оставляющая непрерывными все эти отображения.

Ясно, что отображение $K \to P(K)$ можно естественно доопределить до *ковариантного функтора* на категории симплициальных схем со значениями в категории топологических пространств. Если имеется симплициальное отображение $K \xrightarrow{\theta} L$, то соответствующее непрерывное отображение $P(K) \to P(L)$ строится следующим образом. Оно переводит „вершину" $P(x)$ пространства $P(K)$ в вершину $P(\theta(x))$ пространства $P(L)$, и для каждого симплекса S из K ограничение этого отображения на геометрический симплекс $P(S)$ является *линейно-аффинным*.

Пусть K — некоторая симплициальная схема и $P(K)$ — соответствующий ей полиэдр. Мы определим каноническим образом открытое покрытие $(U_x)_{x \in K}$ пространства $P(K)$, нервом которого является данная симплициальная схема K. Для этого возьмем в качестве U_x множество таких $f \in P(K)$, что $f(x) \neq 0$.

Для заданных элементов $x_0, \ldots, x_n$ из K множество $U_{x_0} \cap \ldots \cap U_{x_n}$ непусто тогда и только тогда, когда существует такое $f \in P(K)$,

что $|f|$ содержит $x_0, \ldots, x_n$, т. е. когда $x_0, \ldots, x_n$ принадлежат одному и тому же симплексу схемы K. Следовательно, нервом рассматриваемого покрытия является K. То, что U_x являются открытыми множествами, следует из непрерывности отображения $f \to f(x)$. Говорят, что U_x является *звездой вершины* x *в* $P(K)$. Вообще *звездой симплекса* S *в* K называют множество $U_S = \bigcap_{x \in S} U_x$. Это, следовательно, множество таких $f \in P(K)$, что $f(x) > 0$ для всех $x \in S$. Заметим, что если образовать *барицентр* g_S геометрического симплекса $P(S)$, то для любого $f \in U_S$ замкнутый отрезок с концами f и g_S содержится целиком в U_S.

Отметим еще, что покрытие $(U_x)_{x \in K}$ пространства $P(K)$ является *точечно конечным*: для каждого $f \in P(K)$ имеется только конечное число индексов x, таких, что $f \in U_x$.

Легко видеть, каким образом можно построить все непрерывные отображения заданного топологического пространства E в $P(K)$. Пусть φ — такое отображение, положим $M_x = \varphi^{-1}(U_x)$. Тогда получаем открытое точечно конечное покрытие $(M_x)_{x \in K} = \mathfrak{M}$ пространства E, нервом которого является, очевидно, некоторая симплициальная подсхема схемы K. Рассмотрим, кроме того, для каждого $x \in K$ функцию $u_x : f \to f(x)$, определенную на $P(K)$, и композицию отображений $\varphi_x = u_x \circ \varphi$. При этом получается семейство $(\varphi_x)_{x \in K}$ непрерывных отображений $E \to \mathbf{R}$, которое, очевидно, обладает следующими свойствами: φ_x всегда $\geqslant 0$ и равна 0 вне M_x, сумма функций φ_x равна 1 всюду на E.

Обратно, возьмем открытое, точечно конечное покрытие $(M_x)_{x \in K}$ пространства E, нервом которого является сама симплициальная схема K [1]), и некоторое *разбиение единицы, подчиненное покрытию* $(M_x)_{x \in K}$, т. е. семейство непрерывных функций φ_x на E, удовлетворяющих предыдущим условиям. Тогда для каждого $t \in E$ легко проверяется, что функция $f_t : x \to \varphi_x(t)$ определяет элемент пространства $P(K)$. Отсюда возникает отображение $\varphi : t \to f_t$ пространства E в $P(K)$. Это отображение непрерывно, так как функции $u_x \circ \varphi = \varphi_x$ непрерывны на E.

Конструкция, которую мы только что определили, требует выбора разбиения единицы, подчиненного данному покрытию. Однако *с точностью до гомотопии* [2]) она от этого выбора не зависит. Для этого достаточно заметить, что если имеются два разбиения единицы $(\varphi_x)_{x \in K}$ и $(\psi_x)_{x \in K}$, подчиненные данному покрытию, то семейство

[1]) Если нерв является симплициальной подсхемой K' схемы K, то можно получить отображение $E \to P(K)$, используя отображение $E \to P(K')$ в качестве промежуточного.

[2]) Понятие гомотопных отображений будет определено позже (пример 3.7.2).

$((1-\lambda)\varphi_x+\lambda\psi_x)_{x\in K}$ для $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ является снова разбиением единицы, подчиненным данному покрытию. Поэтому можно сказать, что *каждое открытое точечно конечное покрытие* $(M_x)_{x\in K}$ *пространства* E *с нервом* K *определяет класс попарно гомотопных непрерывных отображений* $E\to P(K)$. При этом нужно только быть уверенным в существовании разбиения единицы, подчиненного данному покрытию $\mathfrak{M}$ пространства E (это имеет место, например, в случае, когда E паракомпактно; см. гл. II, теорему 3.6.1).

Если существует гомеоморфизм пространства E на $P(K)$, то говорят, что E допускает триангуляцию со схемой K. Каждая такая триангуляция является, по определению, гомеоморфизмом пространства E на $P(K)$. Пространство E называется *триангулируемым*, если хотя бы для одной симплициальной схемы K возможна триангуляция пространства E со схемой K.

3.3. Коцепи со значениями в системе коэффициентов.

Пусть X — *базисный* симплициальный цепной комплекс. Обозначим через $S_n(X)$ множество n-мерных симплексов комплекса X, а через $S(X)$ — объединение множеств $S_n(X)$. Каждому отображению

$$f:\Delta_p\to\Delta_q$$

соответствует отображение

$$\bar{f}:S_p(X)\leftarrow S_q(X),$$

„мультипликативно" зависящее от f.

Система коэффициентов над X состоит в сопоставлении каждому $s\in S(X)$ *модуля* $\mathscr{L}(s)$ над заданным основным кольцом и каждому отображению $f:\Delta_p\to\Delta_q$ и любому $s\in S_q(X)$ *гомоморфизма ограничения*

$$\mathscr{L}(\bar{f}(s))\to\mathscr{L}(s).$$

Естественно предположить, что этот гомоморфизм ограничения мультипликативно зависит от f и что он тождественен, если f тождественно.

В частности, для любой симплициальной схемы K *системой коэффициентов над* K называют объект $\mathscr{L}$, состоящий в задании для каждого симплекса S из K модуля $\mathscr{L}(S)$ и для каждой пары симплексов S, T, удовлетворяющих условию $S\subset T$, такого гомоморфизма $\mathscr{L}(S)\to\mathscr{L}(T)$, что выполнены следующие условия: этот гомоморфизм тождественен, если $S=T$; если $S\subset T\subset U$, то гомоморфизм $\mathscr{L}(S)\to\mathscr{L}(U)$ является композицией гомоморфизмов $\mathscr{L}(S)\to\mathscr{L}(T)$ и $\mathscr{L}(T)\to\mathscr{L}(U)$. Отсюда получается система коэффициентов над базисным симплициальным цепным комплексом $C_*(K)$: с каждым сингулярным симплексом $s:\Delta_p\to K$ связывается модуль $\mathscr{L}(s)=\mathscr{L}(s(\Delta_p))$,

а для $f : \Delta_q \to \Delta_p$ гомоморфизм $\mathscr{L}(\bar{f}(s)) \to \mathscr{L}(s)$ определяется очевидным способом, исходя из отношения $\bar{f}(s)(\Delta_q) \subset s(\Delta_p)$.

Пусть, например, E — топологическое пространство, $\mathscr{L}$ — предпучок абелевых групп с базой E и $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства E. Определяя на I структуру симплициальной схемы, которая вытекает отсюда, мы можем построить некоторую систему коэффициентов над I. Для этого сопоставим каждому симплексу S из I группу

$$\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(M_S), \text{ где } M_S = \bigcap_{i \in S} M_i.$$

Для $S \subset T$ гомоморфизм

$$\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(M_S) \to \mathscr{L}(M_T) = \mathscr{L}(T)$$

определяется структурой предпучка $\mathscr{L}$ и отношением $M_S \supset M_T$. Мы детально изучим это положение в гл. II, § 5.

Пусть $\mathscr{L}$ — система коэффициентов над базисным симплициальным цепным комплексом X. Для каждого целого $n \geqslant 0$ положим

$$C^n(X; \mathscr{L}) = \prod_{s \in S_n(X)} \mathscr{L}(s).$$

Тогда на градуированном модуле

$$C^*(X; \mathscr{L}) = (C^n(X; \mathscr{L}))_{n \geqslant 0}$$

имеем структуру *симплициального коцепного комплекса*, полученную следующим образом. Пусть задана коцепь

$$\alpha = (\alpha(s))_{s \in S_p(X)}, \quad \alpha(s) \in \mathscr{L}(s)$$

и отображение

$$f : \Delta_p \to \Delta_q;$$

тогда коцепь степени q

$$\bar{f}(\alpha) = \beta$$

будет определена по формуле

$$\beta(s) = \text{ограничению элемента } \alpha(\bar{f}(s)) \text{ на } s$$

для каждого $s \in S_q(X)$. Непосредственно проверяются аксиомы п. 3.1.

В частности, для симплициальной схемы K с каждой системой коэффициентов $\mathscr{L}$ над K можно связать симплициальный коцепной комплекс $C^*(K; \mathscr{L})$, а именно комплекс коцепей над $C_*(K)$ со значениями в системе коэффициентов, определенной системой $\mathscr{L}$ над $C_*(K)$. В качестве еще более частного случая рассмотрим топологическое пространство E, его открытое покрытие $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ и предпучок $\mathscr{L}$ абелевых групп с базой E. Связывая с $\mathscr{L}$, как было изложено выше, систему коэффициентов над нервом I покрытия $\mathfrak{M}$, получаем симплициальный коцепной комплекс. Обозначим его через $C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L})$.

Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ — две системы коэффициентов над базисным симплициальным цепным комплексом X. Под *гомоморфизмом* $\theta : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ мы понимаем задание для каждого $s \in S(X)$ гомоморфизма модулей $\theta(s) : \mathscr{L}(s) \to \mathscr{M}(s)$ при условии, что, каковы бы ни были $s \in S_q(X)$ и $f : \Delta_p \to \Delta_q$, имеет место следующая *коммутативная* диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\bar{f}(s)) & \to & \mathscr{M}(\bar{f}(s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{L}(s) & \to & \mathscr{M}(s) \end{array}$$

Определяя очевидным образом сумму и композицию двух гомоморфизмов, легко видеть, что системы коэффициентов над заданным X образуют *абелеву категорию* и что над этой категорией отображение $\mathscr{L} \to C^*(X; \mathscr{L})$ есть *точный ковариантный функтор* со значениями в категории симплициальных коцепных комплексов. Детальное доказательство этих утверждений оставляется читателю.

Пусть, в частности, $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие топологического пространства E. Тогда отображение $\mathscr{L} \to C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L})$ есть точный ковариантный функтор, определенный над категорией предпучков абелевых групп с базой E, со значениями в категории симплициальных коцепных комплексов над кольцом целых рациональных чисел.

3.4. Сингулярные цепи топологического пространства[1])

Через J_n мы будем обозначать множество таких точек $t = (t_0, \ldots, t_n)$ в $(n+1)$-мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, что

$$t_i \geqslant 0, \quad t_0 + \ldots + t_n = 1.$$

Это компактное пространство, которое называют *стандартным геометрическим симплексом размерности n*.

Отображение $f : \Delta_p \to \Delta_q$ канонически определяет линейно-аффинное отображение

$$\hat{f} : J_p \to J_q,$$

переводящее точку $(t_0, \ldots, t_p)$ в точку симплекса J_q, координаты которой $t'_0, \ldots, t'_q$ задаются формулами

$$t'_j = \sum_{j = f(i)} t_i$$

[мы полагаем $t'_j = 0$, если j не принадлежит множеству $f(\Delta_p)$]. Можно также определить $\hat{f}$ как линейно-аффинное отображение симплекса J_p

[1]) Мы изучим в этом параграфе только наиболее элементарную часть теории сингулярных гомологий. Значительно более детальное исследование в связи с теорией пучков можно будет найти в гл. III этого труда.

в J_q, которое отображает i-ю вершину симплекса J_p в $f(i)$-ю вершину симплекса J_q.

Очевидно, что соответствие между f и $\hat{f}$ является мультипликативным.

Пусть теперь E — топологическое пространство. *Сингулярным симплексом размерности n в E* называют любое *непрерывное* отображение

$$s : J_n \to E.$$

Пусть $\Sigma_n(E)$ — множество этих симплексов. Тогда любому отображению $f : \Delta_p \to \Delta_q$ соответствует отображение $\bar{f} : \Sigma_q(E) \to \Sigma_p(E)$, а именно то, которое преобразует $s : J_q \to E$ в $s \circ \hat{f} : J_p \to E$. Очевидно, что условия „транзитивности", необходимые для образования *базисного* симплициального цепного комплекса, выполнены. Обозначим этот комплекс через $CS_*(E)$. Его элементами являются *целочисленные сингулярные цепи* в E. Таким образом, $CS_n(E)$ есть свободная абелева группа, имеющая в качестве базиса $\Sigma_n(E)$, а структурные операторы $\bar{f}$ определяются по линейности из операторов, введенных выше.

Если A — произвольная абелева группа, то положим

$$CS_*(E;\ A) = CS_*(E) \otimes A.$$

Это приводит нас к *сингулярным цепям с коэффициентами в A*. Полагая

$$CS^*(E;\ A) = \mathrm{Hom}\,(CS_*(E),\ A),$$

получаем *сингулярные коцепи пространства E со значениями в A*.

С каждым *непрерывным* отображением $\theta : E \to F$ связан гомоморфизм базисных симплициальных комплексов $CS_*(E) \to CS_*(F)$, полученный преобразованием сингулярного симплекса $s : J_n \to E$ в $\theta \circ s : J_n \to F$. Отсюда следуют гомоморфизмы

$$CS_*(E;\ A) \to CS_*(F;\ A), \quad CS^*(F;\ A) \to CS^*(E;\ A)$$

для любой абелевой группы A.

Возьмем, в частности, пространство E и его подпространство F. Тогда каноническое вложение F в E отождествляет $CS_*(F)$ с некоторым базисным подкомплексом комплекса $CS_*(E)$. Это дает возможность определить группу

$$CS_*(E \bmod F) = CS_*(E)/CS_*(F),$$

которая является симплициальным комплексом (но не базисным симплициальным комплексом). Вообще для произвольной абелевой группы A определяются симплициальные комплексы

$$CS_*(E \bmod F;\ A) = CS_*(E \bmod F) \otimes A,$$
$$CS^*(E \bmod F;\ A) = \mathrm{Hom}\,(CS_*(E \bmod F),\ A)$$

и имеют место точные последовательности

$$0 \to CS_*(F;\ A) \to CS_*(E;\ A) \to CS_*(E \bmod F;\ A) \to 0,$$
$$0 \to CS^*(E \bmod F;\ A) \to CS^*(E;\ A) \to CS^*(F;\ A) \to 0.$$

Замечание 3.4.1. Пусть K — симплициальная схема. Мы покажем сейчас, что можно каноническим образом отождествить симплициальный комплекс $C_*(K)$ с некоторым симплициальным подкомплексом в $CS_*(P(K))$, где $P(K)$ есть полиэдр, сопоставленный схеме K. Для этого достаточно отождествить каждый сингулярный симплекс

$$s : \Delta_n \to K$$

с некоторым сингулярным симплексом топологического пространства $P(K)$. Поскольку отображение s симплициально, то оно индуцирует непрерывное отображение $P(\Delta_n) \to P(K)$. Ввиду того что $P(\Delta_n)$ канонически гомеоморфно стандартному пространству J_n, наше утверждение доказано.

Мы увидим в дальнейшем, что с гомологической точки зрения комплексы $C_*(K)$ и $CS_*(P(K))$ эквивалентны.

3.5. Дифференциал симплициального комплекса.

Пусть X_* — полусимплициальный цепной комплекс. Для каждого целого $n \geqslant 0$ и целого i, такого, что $0 \leqslant i \leqslant n$, рассмотрим строго возрастающее отображение

$$F_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n,$$

которое определяет сингулярный симплекс

$$(0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n)$$

размерности $n-1$ в Δ_n. Этому отображению соответствует гомоморфизм

$$\bar{F}_n^i : X_n \to X_{n-1}.$$

Если $s \in X_n$, то говорят, что $\bar{F}_n^i(s)$ есть *i-я грань цепи* s.

Определим теперь дифференциал в X_* формулой

$$ds = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \bar{F}_n^i(s) \qquad (s \in X_n).$$

Разумеется, это определение имеет смысл также для симплициальных цепных комплексов, так как на них задана, в частности, и полусимплициальная структура. Прежде чем доказывать, что $d^2 = 0$, сделаем следующее замечание. Пусть $C_*^+(\Delta_n)$ — комплекс целочисленных

возрастающих сингулярных цепей стандартной симплициальной схемы Δ_n. Тождественное отображение $u_n : \Delta_n \to \Delta_n$ определяет симплекс $u_n \in C_n^+(\Delta_n)$, часто называемый *фундаментальным симплексом размерности n*. Ясно, что для каждого p абелева группа $C_p^+(\Delta_n)$ допускает в качестве базиса множество симплексов $\bar{f}(u_n)$, где $f \in G_{pn}^{\Gamma}$. Отсюда следует, что если X — полусимплициальный цепной комплекс, то *для каждого $s \in X_n$ существует гомоморфизм $C_*^+(\Delta_n) \to X_n$, отображающий u_n в s, и что такой гомоморфизм единственен.*

Так как определение оператора d является, очевидно, „функторным“, то из предыдущего замечания следует, что для установления соотношения $dd = 0$ достаточно сделать это в том случае, когда $X = C_*^+(\Delta_n)$. Тем более достаточно сделать это в том случае, когда $X = C_*(K)$, где K — произвольная симплициальная схема. В этом последнем случае очевидно, что оператор d определяется на сингулярных симплексах схемы K формулой

$$\boxed{d(x_0, \ldots, x_n) = \sum (-1)^i \cdot (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)}$$

и требуемое равенство проверяется тривиальными вычислениями.

Рассмотрим теперь полусимплициальный коцепной комплекс X^*. Дифференциал в X^* определяют, „транспонируя“ данную выше формулу, т. е. полагая

$$ds = \sum (-1)^i \bar{F}_{n+1}^i(s) \qquad (s \in X^n).$$

Разумеется, снова выполнено равенство $dd = 0$. В качестве примера предположим, что $X^* = C^*(K; A)$, где K — симплициальная схема и A — абелева группа. Коцепью степени n является функция $f(x_0, \ldots, x_n)$ со значениями в A, определенная для $x_0, \ldots, x_n \in K$, принадлежащих одному и тому же симплексу схемы K. Имеем формулу

$$\boxed{df(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \cdot f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).}$$

Эти определения дают возможность говорить о *группах гомологий* $H_n(X)$ симплициального цепного комплекса X и о *группах когомологий* $H^n(X)$ симплициального коцепного комплекса.

Пример 3.5.1. Если K — симплициальная схема, то группы гомологий комплекса $C_*(K; A)$ обозначаются через $H_n(K; A)$, а группы когомологий комплекса $C^*(K; A)$ — через $H^n(K; A)$. Каждое симплициальное отображение

$$\theta : K \to L$$

определяет гомоморфизмы

$$\theta_* : H_n(K;\ A) \to H_n(L;\ A),$$
$$\theta^* : H^n(L;\ A) \to H^n(K;\ A).$$

С другой стороны, если L есть подсхема схемы K, то производные группы для

$$C_*(K \operatorname{mod} L;\ A) \quad \text{и} \quad C^*(K \operatorname{mod} L;\ A)$$

обозначаются через $H_n(K \operatorname{mod} L;\ A)$ и $H^n(K \operatorname{mod} L;\ A)$. В этом случае в силу точных последовательностей п. 3.2 имеем *точную гомологическую последовательность*

$$\boxed{\begin{gathered} \ldots \to H_n(L;A) \to H_n(K;A) \to H_n(K \operatorname{mod} L;A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(L;A) \to \ldots \\ \ldots \xrightarrow{\partial} H_0(L;\ A) \to H_0(K;\ A) \to H_0(K \operatorname{mod} L;\ A) \to 0 \end{gathered}}$$

и *точную когомологическую последовательность*

$$\boxed{\begin{gathered} 0 \to H^0(K \operatorname{mod} L;\ A) \to H^0(K;\ A) \to H^0(L;\ A) \xrightarrow{\delta} \ldots \\ \ldots \xrightarrow{\delta} H^n(K \operatorname{mod} L;\ A) \to H^n(K;\ A) \to \\ \to H^n(L;\ A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(K \operatorname{mod} L;\ A) \to \ldots . \end{gathered}}$$

Если теперь K — *упорядоченная* симплициальная схема, то рассмотрение комплекса $C_*^+(K)$ приводит к группам гомологий $H_n^+(K;\ A)$ и группам когомологий $H_+^n(K;\ A)$. Заметим, что включение $C_*^+(K) \subset C_*(K)$ приводит к каноническим гомоморфизмам

$$H^n(K;\ A) \to H_+^n(K;\ A), \quad H_n^+(K;\ A) \to H_n(K;\ A).$$

Мы покажем в дальнейшем, что эти гомоморфизмы являются изоморфизмами.

Пример 3.5.2. Пусть X — базисный симплициальный цепной комплекс и $\mathcal{A}$ — система коэффициентов над X. Группы когомологий комплекса $C^*(X;\ \mathcal{A})$ обозначаются через $H^n(X;\ \mathcal{A})$. Каждый гомоморфизм $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ определяет гомоморфизмы $\theta^* : H^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X;\ \mathcal{B})$ и всякой точной последовательности систем коэффициентов вида

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

сопоставляется *точная когомологическая последовательность* вида

$$\boxed{\begin{gathered} 0 \to H^0(X;\ \mathcal{A}') \to H^0(X;\ \mathcal{A}) \to H^0(X;\ \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X;\ \mathcal{A}') \to \ldots \\ \ldots \to H^n(X;\ \mathcal{A}') \to H^n(X;\ \mathcal{A}) \to H^n(X;\ \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X;\mathcal{A}') \to \ldots . \end{gathered}}$$

В частности, каждой системе коэффициентов $\mathscr{L}$ над симплициальной схемой K сопоставляются группы $H^n(K; \mathscr{L}) = H^n(C^*(K; \mathscr{L}))$. В еще более частном случае, когда имеется топологическое пространство E, открытое покрытие $\mathfrak{M}$ пространства E и предпучок $\mathscr{L}$ абелевых групп с базой E, получаются *группы когомологий* покрытия $\mathfrak{M}$ *со значениями в* $\mathscr{L}$

$$H^n(\mathfrak{M}; \mathscr{L}) = H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L})).$$

С каждой точной последовательностью предпучков

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

связана *точная когомологическая последовательность*

$$\boxed{\ldots \to H^n(\mathfrak{M}; \mathscr{L}) \to H^n(\mathfrak{M}; \mathscr{L}'') \to H^{n+1}(\mathfrak{M}; \mathscr{L}') \to \ldots .}$$

Пример 3.5.3. Пусть E — топологическое пространство и A — абелева группа. Положим

$$H_n^{\bullet}(E; A) = H_n(CS_*(E; A)), \quad H^n(E; A) = H^n(CS^*(E; A)).$$

Тогда получаем *группы сингулярных гомологий* и сингулярных когомологий пространства E. Каждое непрерывное отображение $f: E \to F$ определяет гомоморфизмы

$$f_*: H_n(E; A) \to H_n(F; A); \quad f^*: H^n(F; A) \to H^n(E; A).$$

В частности, если F является *подпространством* в E, то, определяя очевидным способом „относительные" группы, получаем точные последовательности сингулярных гомологий и когомологий

$$\boxed{\ldots \to H_n(F; A) \to H_n(E; A) \to H_n(E \bmod F; A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(F; A) \to \ldots}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\ldots \to H^n(E \bmod F; A) \to H^n(E; A) \to \\ \to H^n(F; A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(E \bmod F; A) \to \ldots .\end{gathered}}$$

3.6. Декартово произведение симплициальных комплексов.

Пусть X и Y — два симплициальных цепных комплекса над основным кольцом A. Предположим, что X образован правыми A-модулями, а Y — левыми A-модулями. Кроме комплекса $X \underset{A}{\otimes} Y$ (который не обладает естественной „симплициальной" структурой), мы будем рассматривать новый цепной комплекс, который называется

декартовым произведением (над кольцом A) комплексов X и Y и который допускает симплициальную структуру. Этот комплекс, обозначаемый через $X \underset{A}{\times} Y$, определяется следующим образом. Его компонентой размерности n является

$$\boxed{(X \underset{A}{\times} Y)_n = X_n \underset{A}{\otimes} Y_n,}$$

и для любого отображения $f: \Delta_p \to \Delta_q$ структурный гомоморфизм

$$\bar{f}_{X \times Y} : (X \underset{A}{\times} Y)_q \to (X \underset{A}{\times} Y)_p$$

задается формулой

$$\boxed{\bar{f}_{X \times Y} = \bar{f}_X \otimes \bar{f}_Y.}$$

Ясно, что аксиомы п. 3.1 выполнены.

Аналогично определяется декартово произведение двух симплициальных коцепных комплексов

$$(X \underset{A}{\times} Y)^n = X^n \underset{A}{\otimes} Y^n, \qquad \bar{f}^{X \times Y} = \bar{f}^X \otimes \bar{f}^Y.$$

Пусть X и Y — два симплициальных цепных комплекса. Для заданных элементов $a \in X_n$ и $b \in Y_n$ мы будем обозначать элемент $a \otimes b$ из $X_n \underset{A}{\otimes} Y_n$ через $a \times b$, если хотим указать, что $a \otimes b$ рассматривается как элемент *декартова* произведения $X \underset{A}{\times} Y$, а не *тензорного* произведения $X \underset{A}{\otimes} Y$ (так что $a \times b$ имеет размерность n, тогда как $a \otimes b$ — размерность $2n$). Аналогичные обозначения будут применены по отношению к симплициальным коцепным комплексам.

Пусть теперь X и Y — два *базисных* симплициальных цепных комплекса. Тогда $X \underset{A}{\times} Y$ будет *базисным* симплициальным цепным комплексом. По определению симплексом размерности n в $X \underset{A}{\times} Y$ является элемент $s \times t$, где s есть n-мерный симплекс комплекса X, а t — n-мерный симплекс комплекса Y. Поэтому для каждого $n \geqslant 0$ имеем равенство

$$S_n(X \underset{A}{\times} Y) = S_n(X) \times S_n(Y).$$

Пусть $f: X' \to X$ и $g: Y' \to Y$ — гомоморфизмы симплициальных цепных (соответственно коцепных) комплексов. Тогда существует единственный гомоморфизм

$$f \times g : X' \times Y' \to X \times Y,$$

который удовлетворяет следующему условию: $f \times g(a' \times b') = f(a') \times g(b')$ для $a' \in X'_n$ и $b' \in Y'_n$. Это *декартово произведение гомоморфизмов* f *и* g.

Предыдущие определения распространяются очевидным образом на полусимплициальные структуры.

Пример 3.6.1. Пусть K и L — две симплициальные схемы. Обозначим через $K \times L$ следующую симплициальную схему. Множество $K \times L$ есть прямое произведение множеств K и L в обычном смысле слова, и конечное непустое подмножество в $K \times L$ является симплексом тогда и только тогда, когда его проекции являются симплексами схем K и L. Ясно, что аксиомы симплициальной схемы выполнены.

В этом случае имеем канонический изоморфизм базисных симплициальных комплексов

$$\boxed{C_*(K) \underset{\mathbf{Z}}{\times} C_*(L) = C_*(K \times L).}$$

Действительно, сингулярный симплекс размерности n в $K \times L$ есть последовательность точек $((x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n))$ из $K \times L$, принадлежащих симплексу схемы $K \times L$. Это означает, что последовательности

$$s = (x_0, \ldots, x_n), \quad t = (y_0, \ldots, y_n)$$

являются сингулярными симплексами размерности n в K и L. Иначе говоря, можно отождествить множество $\Sigma_n(K \times L)$ сингулярных симплексов размерности n в $K \times L$ с произведением $\Sigma_n(K) \times \Sigma_n(L)$. Требуемое отождествление получается отсюда немедленно.

Совершенно очевидна (в силу ассоциативности тензорного произведения) формула

$$\boxed{C_*(K;\ A) \times C_*(L;\ B) = C_*(K \times L;\ A \otimes B),}$$

справедливая для любых абелевых групп A и B. Напротив, аналогичная формула для коцепных комплексов, вообще говоря, неверна, если только симплициальные схемы K и L не являются *конечными*.

Пример 3.6.2. Пусть E и F — два топологических пространства и

$$u : J_n \to E \times F$$

— сингулярный симплекс размерности n в произведении пространств. Его композиции с проекциями дают сингулярные симплексы

$$s : J_n \to E, \quad t : J_n \to F,$$

задание которых определяет u. Наоборот, для заданных сингулярных симплексов s и t размерности n в E и F существует симплекс u, который допускает их в качестве „проекций“. Иначе говоря, мы имеем здесь снова $\Sigma_n(E \times F) = \Sigma_n(E) \times \Sigma_n(F)$, откуда немедленно следует канонический изоморфизм базисных симплициальных комплексов

$$\boxed{CS_*(E) \times CS_*(F) = CS_*(E \times F).}$$

Вообще имеем

$$\boxed{CS_*(E;\ A) \times CS_*(F;\ B) = CS_*(E \times F;\ A \otimes B),}$$

каковы бы ни были абелевы группы A и B.

Пример 3.6.3. Пусть K и L — две *упорядоченные* симплициальные схемы. Определим в произведении множеств $K \times L$ отношение порядка

$$(x',\ y') \leqslant (x'',\ y''),$$

если

$$x' \leqslant x'' \quad \text{и} \quad y' \leqslant y'',$$

и назовем симплексом в $K \times L$ любое конечное непустое подмножество S, которое удовлетворяет следующим условиям: проекции множества S являются симплексами схем K и L и, кроме того, S вполне упорядочено. Тогда получается упорядоченная симплициальная схема, которая называется *декартовым произведением упорядоченных симплициальных схем K и L*. Ясно, что возрастающим сингулярным симплексом в $K \times L$ размерности n является такая последовательность $((x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n))$, что $(x_0, \ldots, x_n)$ и $(y_0, \ldots, y_n)$ — возрастающие сингулярные симплексы схем K и L. Отсюда получается канонический изоморфизм

$$C_*^+(K \times L) = C_*^+(K) \times C_*^+(L).$$

3.7. Симплициальные гомотопии.

В этом пункте мы будем обозначать через I_* комплекс $C_*(\Delta_1)$ целочисленных (или с коэффициентами в основном кольце A) сингулярных цепей симплициальной схемы Δ_1. Этот комплекс будет играть роль, аналогичную роли „единичного сегмента“ в „геометрической“ теории гомотопии. Заметим, что основное кольцо A действует справа и слева на I_*, так что если X — симплициальный цепной комплекс, образованный левыми A-модулями, то можно образовать произведение $I_* \underset{A}{\times} X$, которое снова является симплициальным цепным комплексом

с левыми операторами из A [1]). В дальнейшем мы будем писать $X \times Y$ вместо $X \underset{A}{\times} Y$, если, конечно, основное кольцо A фиксировано.

Определим прежде всего для каждого симплициального цепного комплекса X гомоморфизмы симплициальных комплексов

$$j^0,\ j^1 : X \to I_* \overset{\bullet}{\times} X.$$

Для этого рассмотрим для каждого n следующие n-мерные симплексы комплекса I_*:

$$u_n^0 = (0, \ldots, 0), \qquad u_n^1 = (1, \ldots, 1).$$

Положим

$$j^0(x) = u_n^0 \times x, \qquad j^1(x) = u_n^1 \times x, \quad \text{если} \quad \dim(x) = n.$$

Проверка того, что j^0 и j^1 коммутируют с операторами граней, очевидна. Заметим к тому же, что j^0 и j^1 можно определить еще следующим образом. Рассмотрим симплициальную схему Δ_0. Для каждого X имеем очевидным образом канонический изоморфизм

$$C_*(\Delta_0) \times X = X.$$

С другой стороны, имеются два симплициальных отображения $\Delta_0 \to \Delta_1$, а именно $0 \to 0$ и $0 \to 1$, откуда получаются два гомоморфизма

$$C_*(\Delta_0) \times X \to C_*(\Delta_1) \times X.$$

Рассматривая их композиции с предыдущим изоморфизмом, получаем j^0 и j^1.

Например, если $X = C_*(K)$, где K — некоторая симплициальная схема, то j^0 и j^1 определяются очевидным образом симплициальными отображениями $x \to (0, x)$ и $x \to (1, x)$ схемы K в $\Delta_1 \times K$.

Обозначим через $\mathfrak{K}_*$ категорию симплициальных цепных комплексов. Сопоставления $X \to X$ и $X \to I_* \times X$ можно рассматривать как ковариантные функторы на $\mathfrak{K}_*$ со значениями в категории цепных комплексов. Тогда j^0 и j^1 являются естественными преобразованиями.

Теорема 3.7.1. *Естественные преобразования j^0 и j^1 гомотопны.*

Иначе говоря, существуют такие *естественные преобразования*

$$D_n : X_n \to (I_* \times X)_{n+1},$$

что

$$j^1 - j^0 = d \circ D_n + D_{n-1} \circ d \ \text{ в размерности } n.$$

[1]) Если L — двусторонний A-модуль и M — левый A-модуль, то $L \underset{A}{\otimes} M$ можно рассматривать как левый A-модуль, полагая $\lambda(l \otimes m) = \lambda l \otimes m$, где $\lambda \in A$, $l \in L$, $m \in M$. — *Прим. перев.*

Ограничимся сначала категорией $\mathfrak{k}$ *симплициальных схем*, иначе говоря, рассмотрим сначала комплексы вида $C_*(K; A)$, где A — основное кольцо. Для определения гомоморфизма

$$D : C_*(K; A) \to C_*(\Delta_1 \times K; A)$$

достаточно сделать это на сингулярных симплексах схемы K. Мы положим

$$D(x_0, \ldots, x_n) = \sum (-1)^i \cdot ((0, x_0), \ldots, (0, x_i), (1, x_i), \ldots, (1, x_n))$$

(правая часть является сингулярной цепью размерности $n+1$ в $\Delta_1 \times K$). Так как

$$j^0(x_0, \ldots, x_n) = ((0, x_0), \ldots, (0, x_n)),$$
$$j^1(x_0, \ldots, x_n) = ((1, x_0), \ldots, (1, x_n)),$$

то проверка того, что D есть гомотопия, связывающая j^0 и j^1, является упражнением в тривиальных выкладках. Кроме того, ясно, что D является естественным преобразованием в категории симплициальных схем. К тому же справедлива формула

$$D(s) = \sum \gamma_n(u, f) \cdot u \times \bar{f}(s) \qquad (\dim(s) = n),$$

где u пробегает множество сингулярных симплексов размерности $n+1$ в Δ_1, f — множество отображений $\Delta_{n+1} \to \Delta_n$ и где коэффициенты $\gamma_n(u, f)$ являются целыми рациональными числами, не зависящими от K.

В случае произвольного симплициального цепного комплекса X мы определяем D с помощью предыдущей формулы, где s на этот раз обозначает произвольный элемент модуля X_n. То, что D является снова гомотопией между j^0 и j^1, вытекает по сути дела из того, что уже доказано, из того, что j^0, j^1, d и D являются *естественными* преобразованиями на категории $\mathfrak{K}_*$, и, наконец, из того, что для любого $x \in X_n$ существуют симплициальная схема K и гомоморфизм $C_*(K) \to X$, образ которого содержит x.

Важное следствие из предыдущего результата получается, когда рассматривают два симплициальных цепных комплекса X и Y и два гомоморфизма

$$\theta^0, \theta^1 : X \to Y.$$

Говорят, что эти гомоморфизмы *симплициально гомотопны*, если существует такой гомоморфизм симплициальных комплексов

$$\theta : I_* \times X \to Y,$$

что $\theta^0 = \theta \circ j^0$, $\theta^1 = \theta \circ j^1$. Ясно, что в этом случае имеется следующий результат.

Теорема 3.7.2. *Два симплициально гомотопных гомоморфизма симплициальных цепных комплексов являются гомотопными и как гомоморфизмы комплексов.*

Пример 3.7.1. Пусть K и L — две симплициальные схемы. Рассмотрим симплициальные отображения

$$\theta^0,\ \theta^1 : K \to L.$$

Говорят, что они *симплициально гомотопны*, если для каждого симплекса S из K множества $\theta^0(S)$ и $\theta^1(S)$ содержатся в одном и том же симплексе из L.

Определим в этом случае отображение

$$\theta : \Delta_1 \times K \to L,$$

положив

$$\theta((0,\ x)) = \theta^0(x), \qquad \theta((1,\ x)) = \theta^1(x).$$

Ясно, что θ *симплициально* (и, наоборот, если θ симплициально, то θ^0 и θ^1 симплицнально гомотопны). Перейдем теперь к сингулярным цепным комплексам для K, L и $\Delta_1 \times K$. В силу формул из примера 3.6.1 получаем условия предыдущей теоремы. Поэтому имеет место

Теорема 3.7.3. *Пусть θ^0 и θ^1 — два симплициально гомотопных симплициальных отображения симплициальной схемы K в симплициальную схему L. Тогда гомоморфизмы*

$$C_*(K) \to C_*(L),$$

индуцированные отображениями θ^0 и θ^1, гомотопны и для любой абелевой группы A гомоморфизмы

$$H_n(K;\ A) \to H_n(L;\ A), \qquad H^n(L;\ A) \to H^n(K;\ A),$$

индуцированные отображениями θ^0 и θ^1, совпадают.

Рассмотрим, в частности, *коническую* симплициальную схему K, т. е. схему, в которой существует такая точка $a \in K$, что для любого симплекса S из K множество $S \cup \{a\}$ также является симплексом из K. Это условие эквивалентно тому, что симплициальные отображения $x \to x$ и $x \to a$ симплициально гомотопны. Отсюда следует, что если обозначить через $C_*(a)$ подкомплекс комплекса $C_*(K)$, соответствующий симплициальной подсхеме, состоящей только из точки a, то тождественное отображение $C_*(K) \to C_*(K)$ гомотопно отображению $C_*(K) \to C_*(a)$, определенному отображением $x \to a$. Так как последний гомоморфизм является, очевидно, *проектированием* комплекса $C_*(K)$ на $C_*(a)$, то получаем, что комплексы $C_*(K)$ и $C_*(a)$ гомотопно эквивалентны.

Отметим, кроме того, что для каждой симплициальной схемы K в комплексе $C_*(K)$ определено *дополнение* $C_0(K) \to \mathbf{Z}$, а именно отображение, которое принимает значение 1 на каждом 0-мерном

симплексе схемы K (как мы видели, это же справедливо и в более общем случае для любого *базисного* симплициального цепного комплекса). Будем говорить, что схема K *ациклична*, если комплекс $C_*(K)$ с дополнением ацикличен. Тогда из предшествующих замечаний немедленно следует, что *каждая коническая симплициальная схема ациклична*. Это же можно получить, используя следующий оператор гомотопии (который не совпадает с оператором, получающимся из доказательства теоремы 3.7.1):

$$(x_0, \ldots, x_n) \to (a, x_0, \ldots, x_n).$$

Его называют *коническим оператором с вершиной a*.

Заметим, что из этих результатов следует

Теорема 3.7.4. *Каждая симплициальная схема вида*

$$\Delta_{n_1} \times \ldots \times \Delta_{n_p}$$

ациклична.

Пример 3.7.2. Пусть E и F — два топологических пространства и

$$\theta^0, \theta^1 : E \to F$$

— *непрерывные* отображения. Обозначая через J_1 стандартный геометрический симплекс размерности 1, имеем два непрерывных отображения

$$j^0, j^1 : E \to J_1 \times E,$$

определенные равенствами

$$j^0(x) = (P^0, x), \qquad j^1(x) = (P^1, x)$$

(P^0 — это точка (1, 0), а P^1 — точка (0, 1) в J_1, так что J_1 в $\mathbf{R}^2$ является прямолинейным отрезком с концами P^0 и P^1).

Говорят, что θ^0 и θ^1 *гомотопны*, если существует такое *непрерывное* отображение

$$\theta : J_1 \times E \to F,$$

что $\theta^0 = \theta \circ j^0$, $\theta^1 = \theta \circ j^1$.

Теорема 3.7.5. *Пусть θ^0 и θ^1 — гомотопные друг другу непрерывные отображения пространства E в пространство F. Тогда гомоморфизмы*

$$CS_*(E) \to CS_*(F),$$

индуцированные отображениями θ^0 и θ^1, симплициально гомотопны и для любой абелевой группы A гомоморфизмы

$$H_n(E; A) \to H_n(F; A), \quad H^n(F; A) \to H^n(E; A),$$

индуцированные отображениями θ^0 и θ^1, совпадают.

Действительно, непрерывные отображения j^0, j^1 и θ определяют гомоморфизмы

$$j_*^0,\ j_*^1 : CS_*(E) \to CS_*(J_1 \times E) = CS_*(J_1) \times CS_*(E),$$
$$\theta_* : CS_*(J_1 \times E) = CS_*(J_1) \times CS_*(E) \to CS_*(F).$$

Далее, для каждого целого n имеем естественное вложение

$$C_*(\Delta_n) \subset CS_*(J_n),$$

получающееся при отождествлении симплициального отображения $f : \Delta_p \to \Delta_n$ с соответствующим непрерывным отображением $\hat{f} : J_p \to J_n$. Тогда легко проверяется, что j_*^0 и j_*^1 сводятся в действительности к каноническим гомоморфизмам

$$CS_*(E) \to I_* \times CS_*(E),$$

если учесть вышеупомянутое отождествление комплекса I_* с подкомплексом в $CS_*(J_1)$. Рассматривая гомоморфизм $I_* \times CS_*(E) \to \to CS_*(F)$, являющийся ограничением гомоморфизма θ_*, получаем немедленно искомый результат.

В качестве следствия из предыдущей теоремы рассмотрим пространство E и его подпространство F. Говорят, что F является *ретрактом* пространства E, если существует непрерывное отображение пространства E на F, которое совпадает на F с тождественным отображением. Если это отображение, кроме того, гомотопно тождественному (как отображение $E \to E$), то говорят, что F есть *деформационный ретракт* пространства E. В этом случае канонические гомоморфизмы $H_n(F;\ \mathbf{Z}) \to H_n(E;\ \mathbf{Z})$ *являются изоморфизмами.*

Действительно, рассмотрим, с одной стороны, каноническое вложение $j : F \to E$ и, с другой стороны, ретрагирующее отображение $p : E \to F$, гомотопное тождественному. Очевидно, что отображение

$$p_* \circ j_* : CS_*(F) \to CS_*(F)$$

тождественно. С другой стороны, отображение $j_* \circ p_* : CS_*(E) \to \to CS_*(E)$ сводится к p_* и гомотопно тождественному в силу предыдущей теоремы. Следовательно, комплексы $CS_*(F)$ и $CS_*(E)$ гомотопно эквивалентны, что и доказывает наше утверждение.

В частности, говорят, что пространство *стягиваемо*, если оно допускает деформационный ретракт, состоящий из одной точки. В этом случае имеет место

Теорема 3.7.6. *Сингулярные гомологии стягиваемого пространства E задаются формулами*

$$H_0(E;\ \mathbf{Z}) = \mathbf{Z},\ H_n(E;\ \mathbf{Z}) = 0 \ \textit{для}\ n \geqslant 1.$$

Этот результат применяется, например, в следующей ситуации. Пусть V — вещественное топологическое векторное пространство и E — некоторое подмножество в V. Говорят, что E есть *конус*, если существует такая точка $a \in E$, что для любого $x \in E$ замкнутый отрезок с концами a и x целиком содержится в E. В этом случае сингулярные гомологии пространства E тривиальны.

Если имеется, в частности, симплициальная схема K и рассматривается открытое покрытие полиэдра $P(K)$, образованное звездами U_x вершин $P(K)$ (п. 3.2), то замечаем, что сингулярные гомологии каждого конечного пересечения множеств U_x тривиальны.

Методы и результаты, которые мы изложили в этом пункте, распространяются с соответствующими изменениями на теорию симплициальных коцепных комплексов.

При этом вместо комплекса I_* сингулярных *цепей* схемы Δ_1 с коэффициентами в заданном основном кольце A нужно рассматривать комплекс I^* сингулярных *коцепей* схемы Δ_1 со значениями в A. Для каждого целого n группа I^n является множеством гомоморфизмов модуля I_n в основное кольцо и, в частности, каждый элемент группы I^n имеет „значение“ на любом симплексе размерности n в I_*.

Пусть теперь X — симплициальный коцепной комплекс. На этот раз имеем канонические гомоморфизмы

$$j_0, j_1 : I^* \times X \to X,$$

определенные следующим образом. Для $\alpha \in I^n$ и $x \in X^n$ полагаем

$$j_0(\alpha \times x) = \alpha\left(u_n^0\right) \cdot x,$$
$$j_1(\alpha \times x) = \alpha\left(u_n^1\right) \cdot x,$$

где u_n^0 и u_n^1 — определенные ранее симплексы (стр. 67).

Если рассматривать j_0 и j_1 как гомоморфизмы *функторов* со значениями в категории коцепных комплексов, то j_0 и j_1 *гомотопны*, т. е. существуют такие естественные преобразования

$$D^n : (I_* \times X)^n \to X^{n-1},$$

что в степени n

$$j_1 - j_0 = d \circ D^n + D^{n+1} \circ d.$$

Эти гомоморфизмы можно, впрочем, определить по формулам предыдущего пункта. Точнее, если взять формулу

$$D_n(x) = \sum \gamma_n(u, f) \cdot u \times \bar{f}(x)$$

предыдущего пункта [$x \in X_n$, суммирование распространяется на симплексы u размерности $n+1$ в I_* и отображения $f : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$, а коэффициенты $\gamma_n(u, f)$ являются *целыми рациональными числами*], то легко видеть, что можно определить D^n по следующей формуле:

$$D^n(\alpha \times x) = \sum \gamma_{n-1}(u, f)\, \alpha(u) \cdot \bar{f}(x),$$

где суммирование распространяется на симплексы u размерности n в I^* и отображения $f:\Delta_n \to \Delta_{n-1}$.

Рассмотрим теперь два гомоморфизма

$$\theta_0,\ \theta_1 : X \to Y$$

симплициальных коцепных комплексов. Говорят, что они симплициально гомотопны, если существует такой гомоморфизм

$$\theta : X \to I^* \times Y,$$

что

$$\theta_i = j_i \circ \theta \qquad (i = 0,1).$$

Из предыдущих результатов ясно, что *симплициально гомотопные гомоморфизмы гомотопны как гомоморфизмы коцепных комплексов*. Этот результат будет нам полезен при изучении когомологий Чеха (гл. II, § 5).

3.8. Ориентированные цепи и альтернированные коцепи.

Пусть X — симплициальный цепной комплекс. Для каждого целого $n \geqslant 0$ любое отображение $\Delta_n \to \Delta_n$ каноническим образом определяет эндоморфизм модуля X_n. Отсюда видно, в частности, что группа подстановок множества Δ_n действует на модуле X_n. Через $\varepsilon(u)$ мы будем обозначать четность любой заданной подстановки u.

Цепь $x \in X_n$ называется *вырожденной*, если она принадлежит подмодулю модуля X_n, порожденному следующими элементами:

(a) цепями вида $\bar{u}(y) - \varepsilon(u)\,y$, где y — произвольный элемент из X_n и u — произвольная подстановка множества Δ_n;

(b) цепями вида $\bar{f}(z)$, где f — произвольное отображение множества Δ_n в $\Delta_p (p \leqslant n-1)$ и z — произвольный элемент модуля X_p.

Множество вырожденных элементов в X_n обозначим через $D_n(X)$, а градуированный подмодуль модуля X, имеющий однородными компонентами модули $D_n(X)$, — через $D(X)$. Тогда $D(X)$ является *подкомплексом* комплекса X, т. е. инвариантен относительно граничного оператора в X (но, разумеется, не относительно операторов граней в X). Докажем это утверждение.

Очевидно, достаточно доказать, что цепь dx вырождена, когда x имеет вид $\bar{u}(y) - \varepsilon(u)\,y$ или $\bar{f}(y)$. С другой стороны, ясно, что каждый гомоморфизм $X \to X'$ симплициальных цепных комплексов отображает $D(X)$ в $D(X')$. При помощи рассуждений, уже не раз нами использованных, из этих двух замечаний можно вывести, что достаточно доказать наше утверждение в том частном случае, когда X имеет вид $C_*(K)$, где K — симплициальная схема, и когда y — сингулярный симплекс схемы K. Мы предоставляем читателю провести доказательство в этом случае.

Элементы фактор-модуля $X_n/D_n(X)$ называют *n-мерными ориентированными цепями* комплекса X. *Комплекс ориентированных цепей* в X определяют как $X/D(X)$.

Когда X является *полусимплициальным* цепным комплексом, можно снова определить подкомплекс $D(X)$, а именно градуированный подмодуль, порожденный цепями $\bar{f}(y)$, где y имеет произвольную размерность n, а f пробегает совокупность возрастающих отображений множеств Δ_p в Δ_n $(p = n+1,\ n+2, \ldots)$.

В этом случае легко доказать [1]), используя каноническое отображение

$$X \to X/D(X),$$

что цепные комплексы X и $X/D(X)$ *естественным* образом *гомотопно эквивалентны*. Можно, очевидно, предположить, что аналогичный результат справедлив для категории *симплициальных* цепных комплексов. К сожалению, автор не знает, верно ли это.

Мы покажем, однако, что имеется интересный результат, относящийся к категории $\mathfrak{k}^{++}$ *упорядоченных симплициальных схем* (гомоморфизмами $K \to L$ здесь являются *строго* возрастающие симплициальные отображения). *На этой категории функторы*

$$K \to C_*(K) \text{ и } K \to C_*(K)/D(C_*(K))$$

гомотопно эквивалентны.

Прежде всего заметим, что для каждого $K \in \mathfrak{k}^{++}$ существует разложение комплекса $C_*(K)$ в *прямую сумму*

$$C_*(K) = C_*^{++}(K) + D(C_*(K)),$$

где через $C_*^{++}(K)$ обозначен подкомплекс в $C_*(K)$, имеющий в качестве базиса *строго* возрастающие сингулярные симплексы $s : \Delta_n \to K$ из K.

Действительно, пусть $(x_0, \ldots, x_n) = s$ — сингулярный симплекс схемы K. Если x_i не являются попарно различными, то этот симплекс находится в $D(C_*(K))$. Если же x_i попарно различны, то, очевидно, существуют строго возрастающий сингулярный симплекс t и подстановка u множества Δ_n, удовлетворяющие равенству $s = \bar{u}(t)$, откуда $s = \bar{u}(t) - \varepsilon(u) \cdot t + \varepsilon(u) \cdot t$. Тем самым доказано, что $C_*(K)$ есть сумма модулей $C_*^{++}(K)$ и $D(C_*(K))$. Остается показать, что эта сумма прямая. Для этого достаточно заметить, что модуль $D(C_*(K))$ в размерности n порожден, с одной стороны, сингулярными симплексами $(x_0, \ldots, x_n)$, некоторые вершины которых совпадают, а с другой стороны, цепями вида $\bar{u}(s) - \varepsilon(u) \cdot s$, где s про-

[1]) Eilenberg S., MacLane S., On the groups $H(\Pi, n)$. I., *Ann. Math.*, 58 (1953), 55—106; см. теорему 4.1.

бегает множество строго возрастающих сингулярных симплексов размерности n и u пробегает группу подстановок множества Δ_n. Наше утверждение легко следует отсюда.

После этого становится ясным, что на категории $\mathfrak{k}^{++}$ мы имеем канонический изоморфизм между функторами

$$K \to C_*^{++}(K) \quad \text{и} \quad K \to C_*(K)/D(C_*(K)).$$

Поэтому все сводится к доказательству того, что *функторы*

$$K \to C_*^{++}(K) \quad \textit{и} \quad K \to C_*(K)$$

гомотопно эквивалентны. Для доказательства этого мы используем следствие из теоремы 2.5.2, взяв в качестве *моделей* в категории $\mathfrak{k}^{++}$ упорядоченные схемы Δ_n $(n = 0, 1, \ldots)$. Так как вложение $C_*^{++}(K) \to C_*(K)$ индуцирует, как легко проверить, изоморфизм групп гомологий в размерности 0, то остается установить, что рассматриваемые функторы являются представительными и ацикличными.

Прежде всего заметим, что C_* ацикличен в силу теоремы 3.7.4. Для доказательства того, что комплексы $C_*^{++}(\Delta_n)$ также ацикличны, достаточно рассмотреть оператор, который отображает строго возрастающий сингулярный симплекс $(x_0, \ldots, x_p)$ схемы Δ_n в $(0, x_0, \ldots, x_p)$, когда $0 < x_0$, и в 0, когда $0 = x_0$.

Для доказательства представительности функтора $K \to C_*^{++}(K)$ поступаем следующим образом. Для каждого $n \geqslant 0$ множество $\mathrm{Hom}(\Delta_n, K)$, т. е. множество строго возрастающих симплициальных отображений схемы Δ_n в K, отождествляется с каноническим базисом модуля $C_n^{++}(K)$. Для этого достаточно отождествить каждое $f \in \mathrm{Hom}(\Delta_n, K)$ с сингулярным симплексом $f(u_n)$ в K, где u_n — фундаментальный симплекс схемы Δ_n. Представительность рассматриваемого функтора немедленно следует отсюда.

Аналогично представительность функтора $K \to C_n(K)$ вытекает из того, что $C_n(K)$ допускает в качестве *базиса* множество сингулярных симплексов $\bar{f}(u)$, где f пробегает множество $\mathrm{Hom}(\Delta_p, K)$ $(p = 0, 1, \ldots, n)$ и для каждого p u пробегает множество таких сингулярных (не обязательно возрастающих) n-мерных симплексов схемы Δ_p, что $u(\Delta_n) = \Delta_p$.

После того как эти свойства установлены, эквивалентность рассматриваемых функторов следует, как мы уже отметили, из теоремы об ацикличных моделях.

Результат, который мы только что установили, можно выразить также следующим образом. Рассмотрим канонические вложения

$$j_n : C_n^{++}(K) \to C_n(K).$$

Тогда на категории $\mathfrak{k}^{++}$ существуют такие естественные преобразования

$$p_n : C_n(K) \to C_n^{++}(K),$$
$$h_n : C_n(K) \to C_{n+1}(K),$$
$$h_n^{++} : C_n^{++}(K) \to C_{n+1}^{++}(K),$$

что справедливы следующие соотношения:

$$j_n \circ d = d \circ j_{n+1};\quad p_n \circ d = d \circ p_{n+1};$$
$$j_n \circ p_n = d \circ h_n + h_{n-1} \circ d;$$
$$p_n \circ j_n = d \circ h_n^{++} + h_{n-1}^{++} \circ d.$$

Заметим, что единственные условия, наложенные на естественное преобразование

$$p : C_*(K) \to C_*^{++}(K),$$

определенное преобразованиями p_n, состоят в том, что оно однородно степени 0, перестановочно с оператором d и тождественно в размерности 0. Учитывая существование канонического разложения

$$C_*(K) = C_*^{++}(K) + D(C_*(K)),$$

можно поэтому взять в качестве p оператор *проектирования*, связанный с этим разложением, т. е. определить p на n-мерных сингулярных симплексах схемы K следующим образом: $p(s) = 0$, если не все вершины симплекса s различны, а в противном случае

$$p(s) = \varepsilon(u) \cdot \bar{u}(s),$$

где u — подстановка множества Δ_n, преобразующая s в строго возрастающий симплекс.

Понятию ориентированной цепи симплициального цепного комплекса соответствует „двойственное" понятие *альтернированной коцепи* симплициального коцепного комплекса X. Говорят, что коцепь $x \in X^n$ является альтернированной, если выполняются следующие условия:

(a) для каждого отображения $f : \Delta_n \to \Delta_p$, где $p > n$, имеем

$$\bar{f}(x) = 0,$$

(b) для каждой подстановки u множества Δ_n имеем

$$\bar{u}(x) = \varepsilon(u) \cdot x.$$

Легко проверяется, что альтернированные коцепи образуют подкомплекс $A(X)$ комплекса X. Однако неизвестно, является ли каноническое вложение $A(X) \to X$ эквивалентностью с гомотопической точки зрения. Мы покажем это в наиболее важном частном случае.

Рассмотрим симплициальную схему K и систему коэффициентов $\mathscr{L}$ над K (п. 3.3). Мы увидим сейчас, что рассматриваемое свойство справедливо для комплекса

$$X = C^*(K; \mathscr{L}).$$

Для этого мы будем считать K упорядоченным. Очевидно, это не ограничивает общности, так как каждое множество можно наделить отношением полной упорядоченности.

Заметим прежде всего, что коцепь

$$\alpha = (\alpha(s))_{s \in S_n(K)}, \quad \alpha(s) \in \mathscr{L}(s)$$

является альтернированной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям: $\alpha(s)$ равно нулю, если вершины симплекса s не являются попарно различными, и

$$\alpha[\tilde{u}(s)] = \varepsilon(u) \cdot \alpha(s)$$

для каждой подстановки u множества Δ_n. Отсюда следует, что альтернированная коцепь полностью определена, если известны значения, которые она принимает на *строго возрастающих* сингулярных симплексах схемы K. Кроме того, эти значения можно выбирать произвольно (разумеется, при условии, что $\alpha(s) \in \mathscr{L}(s)$ для всех s).

Когда система коэффициентов $\mathscr{L}$ тривиальна, то эти рассуждения показывают, что альтернированные коцепи схемы K со значениями в $\mathscr{L}$ канонически отождествляются с элементами комплекса $\mathrm{Hom}[C_*(K)/D(C_*(K)), \mathscr{L}]$. Теорема, которую мы имеем в виду, получается очевидным образом из только что установленного результата.

В случае произвольной системы коэффициентов $\mathscr{L}$ над упорядоченной симплициальной схемой K задача сводится, очевидно, к точному определению в $C^*(K; \mathscr{L})$ гомоморфизма, полученного „транспонированием“ из гомоморфизма вида $C_p(K) \to C_q(K)$. Прежде всего условимся, что для заданных сингулярных симплексов s и t размерностей p и q мы будем писать $s \subset t$ для указания соотношения $s(\Delta_p) \subset t(\Delta_q)$. Будем говорить теперь, что гомоморфизм

$$\theta : C_p(K) \to C_q(K)$$

является *транспонируемым*, если для каждого сингулярного симплекса s размерности p в K справедливо равенство вида

$$\theta(s) = \sum_{\substack{t \in S_q(K) \\ t \subset s}} \alpha(s, t) \cdot t$$

с целыми рациональными коэффициентами $\alpha(s, t)$. В этом случае *транспонированный гомоморфизм*

$${}^t\theta : C^q(K; \mathscr{L}) \to C^p(K; \mathscr{L})$$

определяют следующим образом. Для $\lambda \in C^q(K; \mathscr{S})$ коцепь ${}^t\theta(\lambda) = \mu \in C^p(K; \mathscr{S})$ задается формулой

$$\mu(s) = \sum_{\substack{t \in S_q(K) \\ t \subset s}} \alpha(s, t) \cdot [\text{ограничение элемента } \lambda(t) \text{ на } s].$$

Эта формула имеет смысл, поскольку рассматриваются только симплексы $t \subset s$.

Ясно, что отображение $\theta \to {}^t\theta$ совместимо с различными очевидными алгебраическими операциями. Кроме того, если θ равен нулю на вырожденных цепях, то ${}^t\theta$ имеет своими значениями альтернированные коцепи.

После этих замечаний ясно, что, транспонируя определенные ранее операторы j_n, p_n, h_n, h_n^{++}, получаем, как было отмечено раньше, эквивалентность комплексов X и $A(X)$, когда $X = C^*(K; \mathscr{S})$. Детальная проверка этого утверждения оставляется читателю.

Ценность предшествующего результата состоит, в частности, в том, что он приводит к следующей теореме. *Предположим, что схема K имеет конечную размерность n*[1]. *Тогда*

$$H^p(K; \mathscr{S}) = 0 \quad \textit{для} \quad p > n$$

для любой системы коэффициентов $\mathscr{S}$ над K. В этом случае мы имеем даже равенство $A(C^p(K; \mathscr{S})) = 0$ для $p > n$. Отсюда выводится следующий результат. *Пусть E — топологическое пространство, $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства E и $\mathscr{S}$ — предпучок абелевых групп над E. Тогда $H^p(\mathfrak{M}; \mathscr{S}) = 0$ для $p > n$, если покрытие имеет размерность $\leqslant n$,* т. е. если

$$M_{i_0} \cap \ldots \cap M_{i_n} = \phi,$$

каковы бы ни были попарно различные индексы $i_0, \ldots, i_n$.

3.9. Эквивалентность декартовых и тензорных произведений.

Будем считать основное кольцо A коммутативным при отсутствии специальных оговорок. Все тензорные произведения будем рассматривать относительно A. Для заданного симплициального цепного (соответственно коцепного) комплекса X через $C_n(X)$ [соответственно $C^n(X)$] будем обозначать его компоненту размерности (соответственно степени) n.

Пусть p — целое число $\geqslant 1$. Мы будем обозначать через $\mathfrak{K}_p$ следующую категорию. *Объектами* из $\mathfrak{K}_p$ являются последовательности

[1]) Симплициальная схема K имеет конечную размерность n, если она содержит n-мерные симплексы, но не содержит $(n+1)$-мерных симплексов. — *Прим. ред.*

$\mathbf{X}=(X_1, \ldots, X_p)$, состоящие из p симплициальных цепных комплексов[1]) над заданным основным кольцом A; *гомоморфизмом* $\theta: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ является последовательность гомоморфизмов $\theta_i: X_i \to Y_i$ симплициальных комплексов и, наконец, *композиция* гомоморфизмов $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ получается как композиция соответствующих гомоморфизмов $X_i \to Y_i$ и $Y_i \to Z_i$ для всех i.

Аналогично через $\mathfrak{k}_p$ будем обозначать категорию последовательностей $\mathbf{K}=(K_1, \ldots, K_p)$, состоящих из p симплициальных *схем*, гомоморфизмом $\mathbf{K} \to \mathbf{L}$ в которой является последовательность симплициальных отображений $K_i \to L_i$. Если каждой симплициальной схеме K сопоставить комплекс $C_*(K)$ сингулярных цепей схемы K *с коэффициентами в основном кольце* A, то получается, очевидно, ковариантный функтор

$$\mathbf{K} \to (C_*(K_1), \ldots, C_*(K_p)),$$

определенный на категории $\mathfrak{k}_p$, со значениями в категории $\mathfrak{K}_p$.

Для любых заданных целых положительных чисел $m_1, \ldots, m_p$ будем рассматривать на категории $\mathfrak{K}_p$ функтор

$$F_{m_1 \ldots m_p}: \mathbf{X} \to C_{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(X_p)$$

со значениями в категории A-модулей. На категории $\mathfrak{k}_p$ ему соответствует функтор

$$f_{m_1 \ldots m_p}: \mathbf{K} \to C_{m_1}(K_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(K_p).$$

Разумеется, каждое естественное преобразование

$$T: F_{m_1 \ldots m_p} \to F_{n_1 \ldots n_p}$$

индуцирует естественное преобразование

$$t: f_{m_1 \ldots m_p} \to f_{n_1 \ldots n_p}.$$

Наоборот, каждое естественное преобразование t „продолжается" до некоторого преобразования T, и притом единственным образом.

Для доказательства этого представим прежде всего t в явном виде. Рассмотрим объект $(\Delta_{m_1}, \ldots, \Delta_{m_p})$ из $\mathfrak{k}_p$. Если обозначить фундаментальный симплекс схемы Δ_n через u_n, то t преобразует элемент

$$u_{m_1} \otimes \ldots \otimes u_{m_p} \in C_{m_1}(\Delta_{m_1}) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(\Delta_{m_p})$$

в элемент из $C_{n_1}(\Delta_{m_1}) \otimes \ldots \otimes C_{n_p}(\Delta_{m_p})$, откуда немедленно следует формула

$$t(u_{m_1} \otimes \ldots \otimes u_{m_p}) = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) \cdot \bar{f}_1(u_{m_1}) \otimes \ldots \otimes \bar{f}_p(u_{m_p}),$$

[1]) Все последующие определения и результаты применимы с тривиальными изменениями к полусимплициальным цепным комплексам. Читатель может в этом убедиться сам.

где суммирование производится по всем отображениям

$$f_i : \Delta_{n_i} \to \Delta_{m_i}$$

и коэффициенты γ лежат в основном кольце.

Возьмем теперь $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p) \in \mathfrak{K}_p$ и элементы $x_i \in C_{m_i}(X_i)$. Существует гомоморфизм

$$C_*(\Delta_{m_i}) \to X_i,$$

и притом единственный, который отображает u_{m_i} на x_i. Искомое преобразование T, если оно существует, определяется поэтому формулой

$$T(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) \cdot \bar{f}_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \bar{f}_p(x_p).$$

Очевидно, что так определенное естественное преобразование действительно дает решение поставленной задачи.

Ясно, что соответствие между t и T является A-линейным и совместимым как с композицией преобразований, так и с их тензорным произведением (если имеются естественные преобразования $F_{m_1 \ldots m_p} \to F_{n_1 \ldots n_p}$ и $F_{r_1 \ldots r_q} \to F_{s_1 \ldots s_q}$, определенные соответственно над категориями $\mathfrak{K}_p$ и $\mathfrak{K}_q$, то они определяют с помощью тензорного произведения преобразование $F_{m_1 \ldots m_p r_1 \ldots r_q} \to F_{n_1 \ldots n_p s_1 \ldots s_q}$, определенное на категории $\mathfrak{K}_{p+q}$).

После этих предварительных замечаний мы можем сформулировать главный результат настоящего пункта.

Теорема 3.9.1. (Эйленберг — Зильбер.) *Пусть $\mathfrak{K}_p$ — категория последовательностей, состоящих из p симплициальных цепных комплексов над основным коммутативным кольцом A. Тогда ковариантные функторы*

$$\mathbf{X} \to X_1 \times \ldots \times X_p \quad \textit{и} \quad \mathbf{X} \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_p,$$

определенные над $\mathfrak{K}_p$, со значениями в категории цепных комплексов над A, гомотопно эквивалентны.

Другими словами, существуют такие естественные преобразования

$$U : X_1 \times \ldots \times X_p \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_p,$$
$$V : X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to X_1 \times \ldots \times X_p,$$

что $U \circ V$ и $V \circ U$ *естественно* гомотопны тождественному преобразованию. Мы докажем этот результат, используя следствие из теоремы 2.5.2.

Рассмотрим сначала категорию $\mathfrak{k}_p$. Между функторами

$$\mathbf{K} \to C_*(K_1) \times \ldots \times C_*(K_p) = C_*(K_1 \times \ldots \times K_p),$$
$$\mathbf{K} \to C_*(K_1) \otimes \ldots \otimes C_*(K_p)$$

имеем, очевидно, канонический изоморфизм в размерности 0. Этот изоморфизм совместим с очевидными дополнениями рассматриваемых комплексов.

В качестве *моделей* в $\mathfrak{k}_p$ возьмем последовательности вида $(\Delta_{m_1}, \ldots, \Delta_{m_p})$. Предыдущие функторы *ацикличны*, первый в силу теоремы 3.7.4, второй — в силу п. 2.7. Они также и *представительны*. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно установить представительность каждого функтора

$$\mathbf{K} \to C_{m_1}(K_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(K_p).$$

Но это следует, очевидно, из того, что предыдущая группа допускает в качестве *базиса* множество элементов вида

$$f_1(u_{m_1}) \otimes \ldots \otimes f_p(u_{m_p}),$$

где каждый f_i пробегает множество гомоморфизмов схемы Δ_{m_i} в K_i и где u_n обозначает, как обычно, фундаментальный симплекс схемы Δ_n.

Поэтому теорема об ацикличных моделях показывает, что функторы „декартова произведения" и „тензорного произведения", рассматриваемые над $\mathfrak{k}_p$, гомотопно эквивалентны. Но уже доказано, что любое естественное преобразование, определенное на $\mathfrak{k}_p$, продолжается на $\mathfrak{K}_p$. Отсюда следует сформулированный выше результат для категории $\mathfrak{K}_p$.

Следствие 1. *Пусть X и Y — два симплициальных цепных комплекса. Тогда имеем канонические изоморфизмы*

$$H_n(X \times Y) = H_n(X \otimes Y).$$

Следствие 2. *Пусть K и L — две симплициальные схемы. Тогда гомологии схемы $K \times L$ канонически изоморфны гомологиям комплекса $C_*(K) \otimes C_*(L)$.*

Следствие 3. *Пусть E и F — два топологических пространства. Тогда сингулярные гомологии произведения пространств $E \times F$ канонически изоморфны гомологиям комплекса $CS_*(E) \otimes CS_*(F)$.*

Замечание 3.9.1. Легко построить явным образом на категории $\mathfrak{K}_2$ естественное преобразование

$$X \times Y \to X \otimes Y,$$

совпадающее с тождественным в размерности 0. Достаточно сделать это на категории $\mathfrak{k}_2$, т. е. для $X = C_*(K)$, $Y = C_*(L)$, где K и L являются симплициальными схемами. Читатель легко проверит, что следующая формула (которая показывает, как преобразуется декартово

произведение двух сингулярных симплексов размерности n) определяет такое преобразование:

$$\boxed{(x_0, \ldots, x_n) \times (y_0, \ldots, y_n) \to \sum_{i=0}^{n} (x_0, \ldots, x_i) \otimes (y_i, \ldots, y_n).}$$

Разумеется, *нет необходимости* проверять, что эта формула действительно определяет *эквивалентность* между декартовым и тензорным произведениями. Это ясно заранее, поскольку рассматриваемое преобразование является естественным, перестановочно с дифференциалами и тождественно в размерности 0 — свойства, проверка которых тривиальна.

Можно также явно указать преобразование $X \otimes Y \to X \times Y$.

Замечание 3.9.2. В случае $p=2$ теорема 3.9.1 остается справедливой даже тогда, когда основное кольцо A не является коммутативным. Предположение о коммутативности кольца A нужно только для того, чтобы иметь возможность образовывать тензорные произведения более чем двух сомножителей.

3.10. Распространение на симплициальные коцепные комплексы.

Обозначим через $\mathfrak{K}^p$ категорию, объектами которой являются последовательности $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$, состоящие из p симплициальных коцепных комплексов над заданным основным кольцом A. Гомоморфизмы между объектами этой категории определяются так же, как в предыдущем пункте. Для этой категории мы докажем аналог теоремы 3.9.1.

Сделаем сначала следующее замечание. Рассмотрим над категорией $\mathfrak{K}_p$ естественное преобразование

$$T: C_{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C_{m_p}(X_p) \to C_{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C_{n_p}(X_p).$$

Мы сейчас свяжем с ним каноническим образом *транспонированное* естественное преобразование над категорией $\mathfrak{K}^p$

$${}^tT: C^{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C^{n_p}(X_p) \to C^{m_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes C^{m_p}(X_p).$$

Для этого запишем T в явном виде:

$$T = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) \cdot \bar{f}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{f}_p,$$

где суммирование производится по всем отображениям $f_i: \Delta_{n_i} \to \Delta_{m_i}$ и где коэффициенты γ лежат в основном кольце. Мы определяем тогда

$${}^tT = \sum \gamma(f_1, \ldots, f_p) \cdot \bar{f}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{f}_p,$$

используя ту же самую формулу. Разумеется, в первой формуле $\bar{f}_i$ является структурным гомоморфизмом $C_{m_i} \to C_{n_i}$, тогда как во второй — это структурный гомоморфизм $C^{n_i} \to C^{m_i}$.

Ясно, что соответствие между T и ${}^tT$ удовлетворяет следующим условиям, которые *характеризуют* его полностью:

(a) отображение $T \to {}^tT$ является A-линейным;

(b) для заданных естественных преобразований

$$U : F_{m_1 \ldots m_p} \to F_{n_1 \ldots n_p}, \quad V : F_{n_1 \ldots n_p} \to F_{r_1 \ldots r_p}$$

справедливо равенство

$${}^t(V \circ U) = {}^tU \circ {}^tV;$$

(c) для заданных естественных преобразований

$$U : F_{m_1 \ldots m_p} \to F_{n_1 \ldots n_p}, \quad V : F_{r_1 \ldots r_q} \to F_{s_1 \ldots s_q}$$

справедливо равенство

$${}^t(U \otimes V) = {}^tU \otimes {}^tV;$$

(d) для каждого отображения $f : \Delta_p \to \Delta_q$ транспозицией гомоморфизма $\bar{f} : C_q \to C_p$ является

$$\bar{f} : C^p \to C^q.$$

После этих предварительных замечаний становится ясно, что, „транспонируя“ теорему 3.9.1, получаем следующий результат:

Теорема 3.10.1. *Пусть $\mathfrak{K}^p$ — категория последовательностей, состоящих из p симплициальных коцепных комплексов над основным коммутативным кольцом. Тогда ковариантные функторы*

$$\mathbf{X} \to X_1 \times \ldots \times X_p \quad \textit{и} \quad \mathbf{X} \to X_1 \otimes \ldots \otimes X_p,$$

определенные на $\mathfrak{K}^p$, со значениями в категории коцепных комплексов гомотопно эквивалентны.

Укажем важное применение этой теоремы. Рассмотрим *базисные* симплициальные цепные комплексы $X_1, \ldots, X_p$ и *системы коэффициентов* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p$ над этими комплексами. Над $X_1 \times \ldots \times X_p$ можно построить систему коэффициентов $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p$, полагая

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p (s_1 \times \ldots \times s_p) = \mathcal{A}_1(s_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p(s_p)}$$

и определяя очевидным образом операторы ограничения.

В этом случае существует канонический гомоморфизм симплициальных коцепных комплексов

$$\boxed{j_p : C^*(X_1; \mathcal{A}_1) \times \ldots \times C^*(X_p; \mathcal{A}_p) \to C^*(X_1 \times \ldots \times X_p; \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p),}$$

определяемый следующим образом. Для заданных коцепей $\alpha_i \in \in C^*(X_i;\ \mathcal{A}_i)$ нужно взять в качестве $j_p(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_p)$ коцепь

$$s_1 \times \ldots \times s_p \to \alpha_1(s_1) \otimes \ \ldots \ \otimes \alpha_p(s_p).$$

Гомоморфизм j_p не является, вообще говоря, изоморфизмом. Действительно, в предпоследней формуле элементы степени n в первом члене образуют группу

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \prod_{\dim(s_i)=n} \mathcal{A}_i(s_i),$$

тогда как во втором члене мы находим

$$\prod_{\dim(s_i)=n} \bigotimes_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i(s_i).$$

Но тензорное произведение не перестановочно с *бесконечным* прямым произведением. Однако эта трудность не возникает для конечных прямых произведений. Именно так обстоит дело в случае, когда комплексы X_i содержат только *конечное* число симплексов в каждой размерности (мы говорим тогда, что X_i являются *конечными* базисными симплициальными комплексами). Ясно, что при этих условиях теорема 3.10.1 приводит к следующему результату:

Теорема 3.10.2. *Пусть $X_k\ (1 \leqslant k \leqslant p)$ — конечные базисные симплициальные цепные комплексы и $\mathcal{A}_k\ (1 \leqslant k \leqslant p)$ — системы коэффициентов над X_k. Тогда группы*

$$H^n(X_1 \times \ldots \times X_p;\ \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p)$$

канонически изоморфны группам когомологий комплекса

$$C^*(X_1;\ \mathcal{A}_1) \otimes \ \ldots \ \otimes C^*(X_p;\ \mathcal{A}_p).$$

Пример 3.10.1. Возьмем две конечные симплициальные схемы, K и L. Тогда, каковы бы ни были абелевы группы A и B, группы когомологий

$$H^n(K \times L;\ A \otimes B)$$

можно вычислить с помощью тензорного произведения комплексов

$$C^*(K;\ A) \otimes C^*(L;\ B).$$

Например, *для любого поля k имеем канонические изоморфизмы*

$$H^n(K \times L;\ k) = \sum_{p+q=n} H^p(K;\ k) \otimes_k H^q(L;\ k),$$

как это следует из теоремы Кюннета[1]). Аналогичный результат справедлив для конечных базисных симплициальных комплексов, когда

[1]) См теорему 5.5.2. — *Прим. ред.*

рассматриваемые системы коэффициентов являются *векторными пространствами над полем* k (разумеется, в этом условии подразумевается, как, впрочем, мы и делаем во всем этом параграфе, что рассматриваемые тензорные и декартовы произведения берутся относительно основного кольца k).

3.11. Декартово произведение двух классов гомологий.

Для каждого целого $p \geqslant 1$ выберем раз и навсегда естественное преобразование

$$T_p : X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to X_1 \times \ldots \times X_p$$

на категории $\mathfrak{K}_p$ последовательностей p симплициальных цепных комплексов над заданным основным коммутативным кольцом A. Отсюда мы получаем для каждого n гомоморфизм

$$H_n(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p) \to H_n(X_1 \times \ldots \times X_p),$$

который является *изоморфизмом и не зависит от выбора* T_p (так как в силу соображений § 2 преобразование T_p единственно с точностью до гомотопии). Другими словами, *функторы*

$$\mathbf{X} \to H_n(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p) \text{ и } \mathbf{X} \to H_n(X_1 \times \ldots \times X_p)$$

канонически изоморфны.

С другой стороны, имеются канонические гомоморфизмы

$$H_{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes H_{n_p}(X_p) \to H_{n_1 + \ldots + n_p}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p).$$

Отсюда следуют *естественные* гомоморфизмы

$$\boxed{H_{n_1}(X_1) \otimes \ldots \otimes H_{n_p}(X_p) \to H_{n_1 + \ldots + n_p}(X_1 \times \ldots \times X_p).}$$

Для заданных классов гомологий $\xi_i \in H_{n_i}(X_i)$ образ элемента $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p$ при этом гомоморфизме обозначается через

$$\xi_1 \times \ldots \times \xi_p.$$

Это и есть *декартово произведение* заданных классов гомологий.

Например, если имеются топологические пространства E и F и классы

$$\xi \in H_r(E; A), \quad \eta \in H_s(F; B),$$

где A и B — абелевы группы, то их декартово произведение есть класс

$$\xi \times \eta \in H_{r+s}(E \times F; A \otimes B).$$

Теорема 3.11.1. *Декартово произведение обладает следующими свойствами:*

(a) *Пусть* X, Y, Z — *три симплициальных цепных комплекса*, ξ, η, ζ — *классы гомологий комплексов* X, Y, Z. *Тогда, если отождествить* $(X\times Y)\times Z$ *с* $X\times(Y\times Z)$, *имеет место равенство*

$$\xi\times(\eta\times\zeta)=(\xi\times\eta)\times\zeta.$$

(b) *Пусть* X, Y — *два симплициальных цепных комплекса*, ξ, η — *классы гомологий размерностей* p, q *в* X, Y. *Тогда, если отождествить* $X\times Y$ *с* $Y\times X$, *имеет место равенство*[1])

$$\eta\times\xi=(-1)^{pq}\xi\times\eta.$$

(c) *Пусть* $0\to X'\xrightarrow{j}X\xrightarrow{p}X''\to 0$ — *точная последовательность симплициальных цепных комплексов*, Y — *такой симплициальный цепной комплекс, что последовательность*

$$0\to X'\times Y\to X\times Y\to X''\times Y\to 0$$

также точная. Тогда, каковы бы ни были классы гомологий ξ'' *и* η *в* X'' *и* Y, *справедливо равенство*

$$\partial(\xi''\times\eta)=(\partial\xi'')\times\eta.$$

Доказательство. (a) Рассмотрим на категориях $\mathfrak{K}_p$ и $\mathfrak{K}_q$ естественные преобразования

$$T_p: X_1\otimes\ldots\otimes X_p\to X_1\times\ldots\times X_p,$$
$$T_q: X_1\otimes\ldots\otimes X_q\to X_1\times\ldots\times X_q.$$

Отсюда на категории $\mathfrak{K}_{p+q}$ получаем естественное преобразование

$$T_p\otimes T_q: X_1\otimes\ldots\otimes X_{p+q}\to(X_1\times\ldots\times X_p)\otimes(X_{p+1}\times\ldots\times X_{p+q}).$$

Рассматривая его композицию с T_2, получаем естественное преобразование

$$T_2\circ(T_p\otimes T_q): X_1\otimes\ldots\otimes X_{p+q}\to X_1\times\ldots\times X_{p+q},$$

которое совпадает с тождественным в размерности 0 и поэтому *гомотопно* преобразованию T_{p+q}.

Возьмем классы гомологий $\xi_i\in H(X_i)$ $(1\leqslant i\leqslant p+q)$. Обозначая *для краткости* через $\xi_1\otimes\ldots$ образ элемента $\xi_1\otimes\ldots$ в $H(X_1\otimes\ldots)$, имеем

$$T_p(\xi_1\otimes\ldots\otimes\xi_p)=\xi_1\times\ldots\times\xi_p,$$
$$T_q(\xi_{p+1}\otimes\ldots\otimes\xi_{p+q})=\xi_{p+1}\times\ldots\times\xi_{p+q}$$

[1]) Для наличия этого свойства существенна коммутативность основного кольца.

и, следовательно,

$$T_p \otimes T_q(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_{p+q}) = (\xi_1 \times \ldots \times \xi_p) \otimes (\xi_{p+1} \times \ldots \times \xi_{p+q}).$$

Применяя T_2 и принимая во внимание предыдущий результат, получаем

$$T_{p+q}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_{p+q}) = (\xi_1 \times \ldots \times \xi_p) \times (\xi_{p+1} \times \ldots \times \xi_{p+q}).$$

Так как первый член в точности равен $\xi_1 \times \ldots \times \xi_{p+q}$, то получаем свойство ассоциативности.

(b) Рассмотрим канонические изоморфизмы

$$\sigma : X \times Y \to Y \times X,$$
$$\sigma' : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

(мы рассматриваем категорию $\mathfrak{K}_2$), заданные формулами

$$\sigma(a \times b) = b \times a, \quad \sigma'(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a,$$

где a имеет размерность p, а b — размерность q. Естественные преобразования

$$T_2 \quad \text{и} \quad \sigma^{-1} \circ T_2 \circ \sigma' : X \otimes Y \to X \times Y$$

в размерности 0 совпадают и поэтому гомотопны. Если взять классы гомологий $\xi \in H_p(X)$, $\eta \in H_q(Y)$, то будем иметь

$$T_2(\xi \otimes \eta) = \sigma^{-1} \circ T_2 \circ \sigma'(\xi \otimes \eta).$$

Но так как

$$\sigma'(\xi \otimes \eta) = (-1)^{pq} \eta \otimes \xi,$$

то немедленно получаем требуемый результат.

(c) Представим заданные классы гомологий ξ'' и η циклами $x'' \in X''$ и $y \in Y$. Тогда существуют такие цикл $x' \in X'$ и цепь $x \in X$, что

$$x'' = p(x), \quad j(x') = dx.$$

По определению оператора ∂ класс $\partial\xi''$ представлен циклом x'. Рассмотрим теперь естественное преобразование T_2. Так как $\xi \otimes \eta$ представлен в $X'' \otimes Y$ элементом $x'' \otimes y$, то $\xi'' \times \eta$ представлен циклом $T_2(x'' \otimes y)$. Точно так же $(\partial\xi'') \times \eta$ представлен циклом $T_2(x' \otimes y)$.

Так как T_2 *естественно*, то

$$T_2(x'' \otimes y) = T_2(p(x) \otimes y) = p \times 1(T_2(x \otimes y))$$

и аналогично

$$j \times 1(T_2(x' \otimes y)) = T_2(j(x') \otimes y) = T_2(dx \otimes y).$$

Так как y является циклом, то $dx \otimes y = d(x \otimes y)$, а так как T_2 коммутирует с d, то

$$j \times 1(T_2(x' \otimes y)) = d(T_2(x \otimes y)).$$

Отсюда по построению оператора ∂ следует, что $\partial(\xi'' \times \eta)$ представлен циклом $T_2(x' \otimes y)$. Это завершает доказательство.

Читателю предлагается в качестве упражнения интерпретировать (c) в сингулярных гомологиях (взять точную последовательность, связанную с топологическим пространством E и с его подпространством E', и рассмотреть в качестве Y сингулярный комплекс некоторого пространства F).

Само собой разумеется, что все определения и результаты этого пункта применяются без каких бы то ни было изменений, кроме как в обозначениях, к симплициальным *коцепным* комплексам.

Возьмем, в частности, базисные симплициальные цепные комплексы $X_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ и системы коэффициентов $\mathcal{A}_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ над ними. Для заданных классов когомологий

$$\xi_k \in H^*(X_k;\ \mathcal{A}_k)$$

их декартово произведение $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ есть класс когомологий комплекса $C^*(X_1;\ \mathcal{A}_1) \times \ldots \times C^*(X_p;\ \mathcal{A}_p)$. Но в силу п. 3.10 имеется канонический гомоморфизм j_p этого комплекса в $C^*(X_1 \times \ldots \times X_p;\ \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p)$. Таким образом, существуют канонические гомоморфизмы

$$\boxed{\begin{aligned} &H^{n_1}(X_1;\ \mathcal{A}_1) \otimes \ldots \otimes H^{n_p}(X_p;\ \mathcal{A}_p) \to \\ &\qquad \to H^{n_1 + \ldots + n_p}(X_1 \times \ldots \times X_p;\ \ \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p). \end{aligned}}$$

Если комплексы X_k *конечны*, то можно *отождествить* $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ с его образом в когомологиях комплекса $X_1 \times \ldots \times X_p$. Но даже если X_k не являются конечными, класс когомологий комплекса $X_1 \times \ldots \times X_p$, который мы только что определили, обычно обозначают через $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$.

Например, если имеются *топологические пространства* $E_1, \ldots, E_p$ и классы сингулярных когомологий $\xi_i \in H^*(E_i;\ A_i)$, то $\xi_1 \times \ldots \times \xi_p$ (в этих сокращенных обозначениях) есть класс когомологий произведения пространств $E_1 \times \ldots \times E_p$ со значениями в абелевой группе $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p$. Аналогичный результат справедлив для симплициальных схем.

3.12. Диагональные отображения. $\smile$-произведение.

Рассмотрим категорию *базисных* симплициальных цепных комплексов. Существует естественное преобразование

$$D: X \to X \times X,$$

а именно то, которое преобразует каждый *симплекс* s комплекса X в симплекс

$$D(s) = s \times s$$

комплекса $X \times X$.

Если $X = C_*(K)$, где K — симплициальная схема, то отображение, которое мы только что определили, соответствует, очевидно, симплициальному отображению $x \to (x, x)$ схемы K в $K \times K$. Если $X = CS_*(E)$, где E — топологическое пространство, то оно соответствует непрерывному отображению $x \to (x, x)$ пространства E в $E \times E$. Поэтому D называют *диагональным отображением.* Однако D *нельзя* определить на категории симплициальных (не базисных) комплексов. Действительно, если бы такое преобразование имело место, то на категории *абелевых групп* существовало бы нетривиальное естественное преобразование $G \to G \otimes G$, что, как легко видеть, невозможно.

Рассмотрим теперь системы коэффициентов $\mathcal{A}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ над X. С их помощью можно построить над X новую систему коэффициентов

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p : s \to \mathcal{A}_1(s) \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p(s).}$$

Ясно, что, „транспонируя" диагональное отображение, получаем канонический гомоморфизм

$$\boxed{{}^t D_p : C^*(X \times \ldots \times X;\ \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p) \to C^*(X;\ \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p).}$$

Этот гомоморфизм преобразует коцепь γ декартова произведения в коцепь $s \to \gamma(s \times \ldots \times s)$ комплекса X.

Отсюда следуют гомоморфизмы

$$D_p^* : H^n(X \times \ldots \times X;\ \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_p) \to H^n(X;\ \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p).$$

Рассматривая их композиции с гомоморфизмами, определенными в конце п. 3.11, получаем канонические гомоморфизмы

$$\boxed{\begin{aligned} &H^{n_1}(X;\ \mathcal{A}_1) \otimes \ldots \otimes H^{n_p}(X;\ \mathcal{A}_p) \to \\ &\qquad\qquad \to H^{n_1 + \ldots + n_p}(X;\ \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_p). \end{aligned}}$$

Для этих гомоморфизмов используют специальное обозначение:

$$\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p \to \xi_1 \cup \ldots \cup \xi_p.$$

Они называются $\cup$-*произведениями.*

В упрощенной записи, о которой шла речь в конце предыдущего пункта, получаем

$$\boxed{\xi_1 \cup \ldots \cup \xi_p = D_p^* (\xi_1 \times \ldots \times \xi_p).}$$

Теорема 3.12.1. *Операция $\cup$-произведения ассоциативна, антикоммутативна и совместима с гомоморфизмами систем коэффициентов. Кроме того, если*

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

— точная последовательность систем коэффициентов и $\mathcal{B}$ — такая система коэффициентов, что последовательность

$$0 \to \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A}'' \otimes \mathcal{B} \to 0$$

точна, то для любых классов когомологий ξ'' и η со значениями соответственно в $\mathcal{A}''$ и $\mathcal{B}$ справедливо равенство

$$\delta(\xi'' \cup \eta) = (\delta\xi'') \cup \eta.$$

Совместимость $\cup$-произведения с гомоморфизмами систем коэффициентов тривиальна. Для доказательства ассоциативности нужно проверить формулу

$$D_2^*\big(D_p^*(\xi_1 \times \ \ldots \ \times \xi_p) \times D_q^*(\xi_{p+1} \times \ \ldots \ \times \xi_{p+q})\big) = D_{p+q}^*(\xi_1 \times \ \ldots \ \times \xi_{p+q}),$$

но она вытекает из ассоциативности декартова произведения и ассоциативности диагональных отображений. Антикоммутативность доказывается аналогично. Наконец, последнее утверждение теоремы доказывается прямым рассуждением, аналогичным тому, которое было использовано при доказательстве теоремы 3.11.1. (Заметим, что полученный результат не является следствием аналогичного свойства декартовых произведений, так как предположение о точности последовательности

$$0 \to \mathcal{A}' \times \mathcal{B} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}'' \times \mathcal{B} \to 0$$

сильнее сформулированного в теореме. Вот почему необходимо прямое рассуждение.) Детализация доказательства оставляется читателю в виде упражнения.

Отметим, наконец, следующее свойство. Для классов

$$\xi' \in H^*(X;\ \mathcal{A}'), \quad \xi'' \in H^p(X;\ \mathcal{A}''),$$
$$\eta' \in H^q(Y;\ \mathcal{B}'), \quad \eta'' \in H^*(Y;\ \mathcal{B}'')$$

справедлива формула

$$(\xi' \cup \xi'') \times (\eta' \cup \eta'') = (-1)^{pq} (\xi' \times \eta') \cup (\xi'' \times \eta'').$$

Рассмотрим одно из приложений этих результатов. Предположим, что над базисным симплициальным цепным комплексом X задана *система коммутативных колец с единицами* $\mathcal{A}$ (т. е. система коэффициентов вместе с гомоморфизмом

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

индуцирующим на каждой группе $\mathcal{A}(s)$ структуру коммутативного кольца с единицей). В этом случае можно взять композицию $\smile$-произведения

$$H^*(X;\ \mathcal{A}) \otimes H^*(X;\ \mathcal{A}) \to H^*(X;\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$$

и гомоморфизма

$$H^*(X;\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \to H^*(X;\ \mathcal{A}),$$

определяемого мультипликативной структурой в $\mathcal{A}$. Тем самым на $H^*(X;\ \mathcal{A})$ получается мультипликативная структура. Ясно, что она *ассоциативна, дистрибутивна по отношению к сложению, совместима с градуировкой в* $H^*(X;\ \mathcal{A})$, т. е. что

$$\deg(\xi\eta) = \deg(\xi) + \deg(\eta)\ ^{1)},$$

если ξ и η однородны, *антикоммутативна*, т. е.

$$\eta\xi = (-1)^{\deg(\xi)\deg(\eta)} \cdot \xi\eta,$$

если ξ и η однородны, и, наконец, кольцо $H^*(X;\ \mathcal{A})$ обладает *единицей*, а именно классом коцикла степени 0

$$s \to \text{единица кольца } \mathcal{A}(s).$$

Группа $H^*(X;\ \mathcal{A})$ вместе с этой структурой называется *кольцом когомологий* комплекса X со значениями в $\mathcal{A}$.

[1]) Через $\deg \xi$ автор обозначает степень элемента ξ. — *Прим. ред.*

§ 4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

4.1. Модули с фильтрацией.

Пусть K — модуль над кольцом A с единицей. *Убывающей фильтрацией* модуля K называют любую последовательность его подмодулей K_p, удовлетворяющую следующим условиям:

$$K_p \supset K_{p+1}, \quad \bigcup K_p = K.$$

Можно определить также возрастающие фильтрации. В этом параграфе мы ограничимся изучением убывающих фильтраций и будем называть *модулем с фильтрацией* любой A-модуль K с определенной на нем убывающей фильтрацией.

Если K — модуль с фильтрацией, то *градуированным модулем*[1]), *связанным с* K, называют модуль

$$G(K) = \sum K_p/K_{p+1}$$

с очевидной градуировкой.

Пусть $K = \sum K^p$ — градуированный модуль. Зададим фильтрацию модуля K подмодулями

$$K_p = \sum_{i \geqslant p} K^i.$$

Ясно, что в этом случае градуированный модуль $G(K)$ изоморфен самому K.

Пусть K — модуль с фильтрацией. Предположим, кроме того, что K градуирован подмодулями K^p. Говорят, что градуировка и фильтрация *совместимы*, если

$$K_p = \sum_q K_p \cap K^q,$$

т. е. если K_p однородны. Рассмотрим, например, биградуированный модуль $K = \sum K^{ij}$. Определим *первую фильтрацию* модуля K

[1]) Здесь автор отступает от своего первоначального определения градуированного модуля и переходит к общепринятому, получая возможность рассматривать и неоднородные элементы модуля K. Разумеется, разложение градуированного модуля K в прямую сумму $K = \sum K^p$ должно быть фиксировано. — *Прим. перев.*

с помощью подмодулей

$$'K_p = \sum_{i \geqslant p} K^{ij}$$

и *вторую фильтрацию* с помощью подмодулей

$$''K_p = \sum_{j \geqslant p} K^{ij}.$$

Ясно, что каждая из этих фильтраций совместима с любой из трех возможных градуировок модуля K.

Если фильтрация в K совместима с градуировкой модуля K, то мы будем часто говорить, что она является *фильтрацией градуированного модуля*, а K вместе с заданными градуировкой и фильтрацией будем называть *градуированным модулем с фильтрацией*.

Пусть K — градуированный модуль с фильтрацией. Говорят, что фильтрация в K *регулярна*, если существуют такие целые числа n_i, что

$$K_p \cap K^i = 0 \quad \text{для} \quad p > n_i.$$

Пусть, например, K — биградуированный модуль. *Первая* фильтрация модуля K регулярна относительно *полной* его градуировки, если только выполнено одно из следующих условий: *первая* градуировка в K ограничена *сверху*; *вторая* градуировка в K ограничена *снизу*.

Пусть K и L — два градуированных модуля с фильтрацией и f — *гомоморфизм* модуля K в L, т. е. такой гомоморфизм A-модулей, что

$$f(K_p) \subset L_p, \quad f(K^q) \subset L^q.$$

Ясно, что f определяет однородный гомоморфизм $G(K) \to G(L)$ бистепени (0, 0).

Лемма 4.1.1. *Пусть f — гомоморфизм градуированного модуля с фильтрацией K в градуированный модуль с фильтрацией L. Если фильтрация в K регулярна и если гомоморфизм*

$$G(K) \to G(L),$$

связанный с f, является мономорфизмом, то f — мономорфизм. Если фильтрация в L регулярна и если гомоморфизм $G(K) \to G(L)$, связанный с f, является эпиморфизмом, то f — эпиморфизм.

Для доказательства первого утверждения возьмем такой $x \in K$, что $f(x) = 0$. Так как f совместим с градуировкой, то можно предположить, что $x \in K^i$ для некоторого i. Кроме того, существует такое p, что $x \in K_p$. Так как f аннулирует образ элемента x в K_p/K_{p+1}, то $x \in K_{p+1}$. Следовательно, $x \in K_n$ для достаточно больших n. Но так как

$$K_n \cap K^i = 0$$

для достаточно больших n, то $x = 0$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

4.2. Спектральная последовательность дифференциального модуля с фильтрацией.

Дифференциальным модулем с фильтрацией называют любой дифференциальный модуль K с такой фильтрацией, что $d(K_p) \subset K_p$ для всех p. Теория спектральных последовательностей состоит по существу в использовании фильтрации модуля K для построения производного модуля $H(K)$ при помощи „последовательных приближений".

Пусть r — целое число. Положим

$$Z_r^p = Z(K_p \bmod K_{p+r}), \tag{1}$$

т. е. множеству таких $x \in K_p$, что $dx \in K_{p+r}$. Для $r \leqslant 0$ имеем, очевидно, $Z_r^p = K_p$.

Среди элементов модуля Z_r^p находятся, с одной стороны, элементы из Z_{r-1}^{p+1} и, с другой стороны, все элементы модуля K_p, которые являются границами. В частности, Z_r^p содержит dZ_{r-1}^{p+1-r}, т. е. множество элементов модуля K_p, которые являются границами элементов из K_{p-r+1}. Мы положим

$$E_r^p = Z_r^p / (dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}), \quad E_r = \sum_p E_r^p. \tag{2}$$

Заметим, что если $x \in K_p$ есть цикл, то он определяет элемент модуля E_r^p для всех r, а если это граница, то элемент модуля E_r^p, определенный элементом x, равен нулю для достаточно больших r.

Теорема 4.2.1. *На градуированном модуле E_r существует такой дифференциал d_r степени r, что производный модуль $H(E_r)$ канонически изоморфен модулю E_{r+1}.*

Действительно, дифференциал d в K отображает Z_r^p в Z_r^{p+r} и $dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}$ на dZ_{r-1}^{p+1}. Так как

$$E_r^{p+r} = Z_r^{p+r} / (dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}),$$

то d при переходе к фактор-модулям индуцирует дифференциал

$$d_r : E_r^p \to E_r^{p+r}.$$

Для того чтобы элемент $x \in Z_r^p$ определял цикл степени p в E_r, необходимо и достаточно, чтобы $dx \in dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}$, т. е. чтобы $dx = dy + z$, где $y \in Z_{r-1}^{p+1}$, $z \in Z_{r-1}^{p+r+1}$. Полагая $x = y + u$, получаем $du = z$. Таким образом, одновременно имеем $u \in K_p$ и $du \in K_{p+r+1}$, т. е. $u \in Z_{r+1}^p$. Из этих вычислений немедленно следует, что

$$Z^p(E_r) = (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) / (dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}).$$

С другой стороны, $B^p(E_r)$ состоит из классов, представленных элементами модуля dZ_r^{p-r}. Так как этот модуль содержит dZ_{r-1}^{p-r+1}, то

$$B^p(E_r) = (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})/(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}).$$

Мы получаем, таким образом,

$$H^p(E_r) = (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1})/(dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1}) =$$
$$= Z_{r+1}^p/(Z_{r+1}^p \cap (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})).$$

Так как, очевидно,

$$Z_{r+1}^p \supset dZ_r^{p-r}, \quad Z_{r+1}^p \cap Z_{r-1}^{p+1} = Z_{r-1}^p,$$

то окончательно получаем

$$H^p(E_r) = Z_{r+1}^p/(dZ_r^{p-r} + Z_r^{p+1}) = E_{r+1}^p,$$

что и завершает доказательство.

Спектральная последовательность модуля K состоит по определению из комплексов E_r, рассмотренных выше.

Определяют, кроме того, член E_∞. Положим

$$K_\infty = 0, \quad K_{-\infty} = K,$$
$$Z_\infty^p = Z(K_p \bmod K_\infty) = \text{циклы из } K_p,$$
$$B_\infty^p = K_p \cap dK_{-\infty} = \text{границы из } K_p;$$

тогда

$$E_\infty^p = Z_\infty^p/(B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}), \quad E_\infty = \sum E_\infty^p.$$

Если положить вообще

$$B_r^p = K_p \cap dK_{p-r},$$

то для любого r будет справедлива формула

$$E_r^p = Z_r^p/(B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}).$$

Теорема 4.2.2. *Пусть $H(K)_p$ — образ модуля $H(K_p)$ в $H(K)$. Если взять фильтрацию модуля $H(K)$ подмодулями $H(K)_p$, то имеем канонический изоморфизм*

$$E_\infty = G(H(K)).$$

Действительно, существует эпиморфизм $Z_\infty^p \to H(K)_p$. Для того чтобы при этом $z \in Z_\infty^p$ отображался в $H(K)_{p+1}$, необходимо и достаточно, чтобы z был гомологичен некоторому элементу из K_{p+1}, т. е. чтобы z принадлежал $B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}$, что и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь случай, когда модуль K снабжен *градуировкой*, совместимой с заданной фильтрацией, и однородным дифференциалом степени $+1$ (в этом случае говорят, что K есть

комплекс с фильтрацией). Тогда на членах E_r можно определить биградуировку. Достаточно положить

$$Z_r^{pq} = Z_r^p \cap K^{p+q}, \quad B_r^{pq} = B_r^p \cap K^{p+q},$$
$$E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,\, q-1}).$$

Относительно элементов модуля E_r^{pq} часто говорят, что они имеют *фильтрующую степень* p, *полную степень* $p+q$ *и дополнительную степень* q.

Ясно, что

$$d_r : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,\, q-r+1}$$

и что при отождествлении $E_{r+1} = H(E_r)$ модуль E_{r+1}^{pq} образован классами циклов из E_r^{pq}.

Кроме того, очевидно, что фильтрация посредством $H(K)_p$ и градуировка подмодулями $H^q(K)$ в $H(K)$ совместимы. Полагая

$$H^q(K)_p = H^q(K) \cap H(K)_p,$$

имеем равенство

$$E_\infty^{pq} = H^{p+q}(K)_p / H^{p+q}(K)_{p+1}.$$

4.3. Аппроксимация модуля E_∞ членами E_r.

Пусть K — комплекс с фильтрацией. Будем предполагать в этом пункте, что *фильтрация в* K *регулярна*, т. е. что

$$K_p \cap K^q = 0 \quad \text{для} \quad p > n(q).$$

Прежде всего отсюда следует, что

$$Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq} \quad \text{для} \quad r > n(p+q+1) - p,$$

ибо если $z \in Z_r^{pq}$, то dz принадлежит модулю $K_{p+r} \cap K^{p+q+1}$, который равен нулю для

$$p + r > n(p+q+1).$$

С другой стороны,

$$d_r = 0 \quad \text{на} \quad E_r^{pq} \quad \text{для} \quad r > n(p+q+1) - p,$$

ибо для рассматриваемых значений r имеем $Z_r^{p+r,\, q-r+1} = 0$.

Так как для заданных p, q и достаточно больших r оператор d_r равен нулю на E_r^{pq}, то отождествление $H(E_r) = E_{r+1}$ приводит к отображению модуля E_r^{pq} на E_{r+1}^{pq}. Итерируя эти гомоморфизмы, получаем, следовательно, эпиморфизмы

$$\theta_s^r : E_r^{pq} \to E_s^{pq},$$

определенные для $s > r > n(p+q+1)-p$. Очевидно, выполняются соотношения транзитивности, которые позволяют определить *индуктивный предел* модулей E_r^{pq}, когда r стремится к бесконечности. Мы покажем, что *этот индуктивный предел есть не что иное, как* E_∞^{pq}.

Действительно, для достаточно больших r $Z_r^{pq}=Z_\infty^{pq}$, $Z_r^{p+1,q-1}=$ $=Z_\infty^{p+1,q-1}$. Кроме того, для любого r имеем $B_r^{pq}\subset B_\infty^{pq}$.

Так как

$$E_r^{pq}=Z_r^{pq}/(B_{r-1}^{pq}+Z_{r-1}^{p+1,q-1}),$$

$$E_\infty^{pq}=Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq}+Z_\infty^{p+1,q-1}),$$

то для достаточно больших r имеем канонический гомоморфизм

$$\theta_\infty^r: E_r^{pq}\to E_\infty^{pq},$$

определенный тождественным вложением $Z_r^{pq}\to Z_\infty^{pq}$. Этот гомоморфизм является, очевидно, эпиморфизмом. С другой стороны, так как θ_s^r получены из тождественного отображения $Z_r^{pq}\to Z_s^{pq}$, то имеем соотношение совместимости $\theta_\infty^r=\theta_\infty^s\circ\theta_s^r$ для $r<s$. Для того чтобы отождествить E_∞^{pq} с индуктивным пределом модулей E_r^{pq}, остается, следовательно, показать, что B_∞^{pq} есть объединение модулей B_r^{pq}. Последнее вытекает из того, что K есть объединение модулей K_p. Отсюда следует сформулированное утверждение.

Отметим важное следствие этого результата. Рассмотрим два комплекса с фильтрацией K и L и гомоморфизм $f: K\to L$ (совместимый с градуировками и фильтрациями). Очевидным образом получаются гомоморфизмы

$$E_r(K)\to E_r(L),$$

перестановочные с дифференциалами d_r для конечных r и совместимые с отождествлением $E_{r+1}=H(E_r)$ для конечных r и с отождествлениями $E_\infty(K)=G(H(K))$, $E_\infty(L)=G(H(L))$. Предположим теперь, что фильтрации в K и L регулярны. Тогда фильтрации в $H(K)$ и $H(L)$ тоже регулярны. Поэтому если гомоморфизм $E_\infty(K)\to E_\infty(L)$, индуцированный f, является изоморфизмом, то тем же свойством обладает $f^*: H(K)\to H(L)$. Принимая во внимание то, что если $f^*: E_r(K)\to E_r(L)$ является изоморфизмом для некоторого индекса r_0, то это верно и для всех $r\geqslant r_0$, получаем:

Теорема 4.3.1. *Пусть f — гомоморфизм комплекса с фильтрацией K в комплекс с фильтрацией L. Предположим, что фильтрации в K и L регулярны. Если для некоторого целого r гомоморфизм $f^*: E_r(K)\to E_r(L)$ является изоморфизмом, то тем же свойством обладает*

$$f^*: H^*(K)\to H^*(L).$$

Приведем теперь другое следствие из теоремы аппроксимации. Пусть K — комплекс с фильтрацией. Предположим, что $E_r^{pq}=0$ для заданных значений p, q, r. Так как $E_{r+1}=H(E_r)$, то ясно, что вообще $E_s^{pq}=0$ для $r\leqslant s<\infty$. Если фильтрация в K регулярна, то в пределе получаем, что $E_\infty^{pq}=0$.

4.4. Вырожденные спектральные последовательности.

Пусть K — комплекс с фильтрацией. Будем предполагать, что эта фильтрация регулярна. Мы скажем, что спектральная последовательность комплекса K *вырождена*, если существует такое целое число r, что для всех n имеем

$$E_r^{n-q,\,q}=0 \quad \text{для} \quad q\neq q_0,$$

где q_0 есть целое число, не зависящее от n. Это значит, что в биградуированной группе E_r единственными ненулевыми членами являются $E_r^{n-q_0,\,q_0}$.

Как мы видели в конце предыдущего пункта, переход к пределу дает, что

$$E_r^{n-q,\,q}=E_\infty^{n-q,\,q}=0 \quad \text{для} \quad q\neq q_0.$$

Далее, ясно, что $d_s=0$ для всех $s\geqslant r$, откуда $E_r^{n-q_0,\,q_0}=E_\infty^{n-q_0,\,q_0}$. Группа E_∞ является градуированной группой, связанной с $H^*(K)$. Точнее, $H^n(K)$ имеет фильтрацию, и градуированная группа, связанная с ней, есть прямая сумма групп $E_\infty^{n-q,\,q}$. Так как все эти группы, кроме одной, нулевые и так как

$$\bigcup_p H^n(K)_p=H^n(K), \qquad \bigcap_p H^n(K)_p=0$$

(второе равенство следует из того, что фильтрация в K регулярна), то окончательно получаем следующий результат.

Теорема 4.4.1. *Пусть K — комплекс с регулярной фильтрацией. Предположим, что для некоторого целого r имеем*

$$E_r^{n-q,\,q}=0 \quad \textit{для} \quad q\neq q_0.$$

Тогда имеем канонические изоморфизмы

$$H^n(K)=E_r^{n-q_0,\,q_0}.$$

4.5. Случай положительной фильтрации и фильтрации, подчиненной градуировке.

Пусть K — комплекс с фильтрацией. Мы скажем, что фильтрация в K *положительна*, если $K_0=K$ и, следовательно, $K_p=K$ для $p\leqslant 0$. В этом случае $E_r^p=0$ для $p<0$. Действительно,

$E_r^p = Z_r^p/(B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1})$, Z_r^p образован такими $z \in K_p$, что $dz \in K_{p+r}$, и $Z_{r-1}^{p+1} = Z_r^p \cap K_{p+1}$. Так как для $p < 0$ имеем $K_{p+1} = K$, то $Z_r^p = Z_{r-1}^{p+1}$, откуда следует наше утверждение. Разумеется, этот результат справедлив и для $r = \infty$.

Рассмотрим теперь группу $H^n(K)$. Эта группа имеет фильтрацию, и связанная с ней градуированная группа есть $\sum E_\infty^{p,\,n-p}$. Так как, очевидно,

$$H^n(K)_p = H^n(K) \quad \text{для} \quad p \leqslant 0$$

в силу нашего предположения, то, в частности, получаем

$$E_\infty^{0n} = H^n(K)/H^n(K)_1,$$

откуда следует точная последовательность

$$H^n(K) \to E_\infty^{0n} \to 0.$$

С другой стороны, элементы группы E_r^{pq}, которые являются границами для d_r, получаются из элементов группы $E_r^{p-r,\,q+r-1}$ при действии d_r. Следовательно, никакой ненулевой элемент группы E_r^{0n} не является границей, если $r \geqslant 1$. Поэтому после отождествлений $E_{r+1} = H(E_r)$ мы имеем естественные вложения

$$E_1^{0n} \supset E_2^{0n} \supset E_3^{0n} \supset \ldots .$$

Каждый член здесь отождествляется с подгруппой циклов предыдущего члена.

Кроме того, E_∞^{0n} погружается в каждую группу E_r^{0n} $(r \geqslant 1)$. Действительно, ясно, что $B_\infty^{0,\,n} = B_{r-1}^{0,\,n}$ и $Z_\infty^{0,\,n} \cap Z_{r-1}^{1,\,n-1} = Z_\infty^{1,\,n-1}$. Следовательно,

$$Z_\infty^{0,\,n} \cap (B_{r-1}^{0,\,n} + Z_{r-1}^{1,\,n-1}) = B_\infty^{0,\,n} + Z_\infty^{1,\,n-1}.$$

Поэтому вложение $Z_\infty^{0,\,n} \to Z_r^{0,\,n}$ приводит при переходе к факторгруппам к вложению $E_\infty^{0,\,n} \to E_r^{0,\,n}$ для $r \geqslant 1$.

Комбинируя эти результаты, получаем, что если фильтрация в K положительна, то для любых n и любых $r \geqslant 1$ имеются канонические гомоморфизмы

$$H^n(K) \to E_r^{0,\,n}.$$

Рассмотрим теперь другой важный случай, а именно случай, когда *фильтрация подчинена градуировке*, т. е. когда

$$K^n \cap K_p = 0 \quad \text{для} \quad p > n$$

(таким образом, в этом случае фильтрация в K регулярна). Так как $Z_r^{pq} \subset K^{p+q} \cap K_p$, то, очевидно,

$$E_r^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad q < 0.$$

Рассмотрим теперь $E_r^{n,0}$. Эта группа отображается дифференциалом d_r в $E_r^{n+r,\,-r+1}$, т. е. в 0, если $r \geqslant 2$, так что в этом случае все ее элементы являются циклами. При $r \geqslant 2$ имеем, следовательно, гомоморфизмы

$$E_r^{n,0} \to E_{r+1}^{n,0},$$

являющиеся, впрочем, эпиморфизмами. В силу п. 4.3 группа $E_\infty^{n,0}$ отождествляется с индуктивным пределом групп $E_r^{n,0}$ относительно рассматриваемых гомоморфизмов. В частности, мы будем иметь гомоморфизм

$$E_2^{n,0} \to E_\infty^{n,0}.$$

С другой стороны, ясно, что $H^n(K)_p = 0$ для $p > n$. Поэтому

$$E_\infty^{n,0} = H^n(K)_n / H^n(K)_{n+1} = H^n(K)_n$$

вкладывается канонически в $H^n(K)$. Таким образом, *для случая, когда фильтрация подчинена градуировке, получаем канонический гомоморфизм*

$$E_2^{n,0} \to H^n(K).$$

В том случае, когда оба рассмотренных выше предположения выполняются одновременно, имеет место следующий важный результат.

Теорема 4.5.1. *Пусть K — комплекс с фильтрацией, удовлетворяющий следующим условиям:*

$$K_0 = K, \quad K^n \cap K_p = 0 \quad \textit{для} \quad p > n.$$

Тогда имеется точная последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(K) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(K).$$

Все гомоморфизмы, фигурирующие в этой последовательности, уже были определены. Остается, следовательно, доказать точность этой последовательности.

Для доказательства того, что $E_2^{1,0} \to H^1(K)$ — мономорфизм, достаточно показать, что $E_2^{1,0} \to E_\infty^{1,0}$ — мономорфизм, и, стало быть, показать, что $E_r^{1,0} \to E_{r+1}^{1,0}$ — мономорфизм (а, значит, и изоморфизм) для $r \geqslant 2$. Но элемент группы $E_r^{1,0}$ может быть границей только тогда, когда он получается с помощью d_r из некоторого элемента группы $E_r^{1-r,\,r-1}$. Так как $E_r^{pq} = 0$ для $p < 0$, то наше утверждение доказано.

Градуированной группой, связанной с $H^1(K)$, является группа $E_\infty^{1,0} + E_\infty^{0,1}$ (так как из $E_\infty^{pq} \neq 0$ следует $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$). Имеем, следовательно, точную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(K) \to E_\infty^{0,1} \to 0.$$

Так как гомоморфизм $H^1(K) \to E_2^{0,1}$ является композицией гомоморфизмов $H^1(K) \to E_\infty^{0,1}$ и $E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1}$, то легко видеть, что второе свойство, которое нужно установить, состоит в том, что $E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1}$ — мономорфизм. Это было доказано выше в случае, когда фильтрация положительна.

Покажем теперь, что образ группы $H^1(K)$ в $E_2^{0,1}$ совпадает с ядром оператора d_2. Имеем $E_2^{0,1} = Z_2^{0,1}/(B_1^{0,1} + Z_1^{1,0})$ и, с другой стороны,

$$E_2^{2,0} = Z_2^{2,0}/(B_1^{2,0} + Z_1^{3,-1}) = Z_2^{2,0}/B_1^{2,0}.$$

Поэтому ядро оператора d_2 образовано такими классами $z \in Z_2^{0,1}$, что $dz \in B_1^{2,0}$, т. е. $dz = du$, где $u \in K_1 \cap K^1$. Полагая $z = u + v$, имеем $dv = 0$ и

$$v \in K_0 \cap K^1, \quad \text{т. е.} \quad v \in Z_\infty^{0,1}.$$

Кроме того, так как одновременно $u \in K_1 \cap K^1$ и $du \in K_2$, то $u \in Z_1^{1,0}$. Следовательно, класс элемента z в $E_2^{0,1}$ принадлежит образу группы $E_\infty^{0,1}$, т. е. группы $H^1(K)$. Обратно, если класс в $E_2^{0,1}$ можно представить в $Z_2^{0,1}$ элементом группы $Z_\infty^{0,1}$, т. е. циклом, то он, очевидно, аннулируется оператором d_2.

Остается установить, что ядро гомоморфизма $E_2^{2,0} \to H^2(K)$ есть образ оператора d_2. Ясно, что оно содержит образ d_2, так как последний представлен в $Z_2^{2,0}$ границами. С другой стороны, возьмем $z \in Z_2^{2,0}$, класс которого в $E_2^{2,0}$ аннулируется в $H^2(K)$. Так как гомоморфизм $E_r^{2,0} \to H^2(K)$ получается переходом к фактор-группам из равенств $Z_2^{2,0} = Z_3^{2,0} = \ldots = Z_\infty^{2,0}$, то сделанное предположение означает, что z есть граница в K. Можно, следовательно, написать $z = du$. Так как $z \in K_2 \cap K^2$, то можно предположить, что $u \in K^1 = K_0 \cap K^1$, и поэтому $u \in Z_1^{0,1}$. Таким образом, элемент группы $E_2^{2,0}$, представленный элементом z, находится в образе d_2, что завершает доказательство.

4.6. Случай, когда база или слой сферичны.

Пусть K — комплекс с фильтрацией. Мы скажем, что находимся в условиях сферической базы, если существует такое целое число $n \geqslant r$, что

$$E_r^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad p \neq 0,\ n,$$

и сферического слоя, если существует такое целое число $n \geqslant r$, что

$$E_r^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad q \neq 0,\ n.$$

Такая ситуация впервые встретилась при изучении расслоенных пространств, у которых база (соответственно слой) является сферой размерности n (отсюда происхождение терминологии).

Теорема 4.6.1. *Пусть K — комплекс с фильтрацией. Предположим, что существует такое целое число $n \geqslant r$, что $E_r^{pq} = 0$ для $p \neq 0$, n. Тогда, если фильтрация в K регулярна, имеем точную последовательность*

$$\ldots \to E_r^{n,\, i-n} \to H^i(K) \to E_r^{0,\, i} \to E_r^{n,\, i+1-n} \to H^{i+1}(K) \to \ldots .$$

Так как фильтрация в K регулярна, то получаем прежде всего, как в конце п. 4.3, что

$$E_\infty^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad p \neq 0,\ n,$$

и, следовательно, имеем точную последовательность

$$0 \to E_\infty^{n,\, i-n} \to H^i(K) \to E_\infty^{0,\, i} \to 0$$

для любого целого числа i.

Рассмотрим теперь дифференциал d_r. Он отображает E_r^{pq} в $E_r^{p+r,\, q-r+1}$ и, следовательно, равен нулю на E_r, если $r < n$. Значит, в этом случае E_{r+1} канонически изоморфна группе E_r. Если $r+1 < n$, то аналогичные рассуждения показывают, что d_{r+1} равен нулю и, следовательно, $E_r = E_{r+1} = E_{r+2}$. Продолжая это рассуждение, мы видим, следовательно, что существуют канонические изоморфизмы

$$E_r^{pq} = E_n^{pq}.$$

Иначе говоря, мы можем предположить, что $r = n$.

Ясно, что в этом случае каждый элемент группы E_n^{nq} является циклом относительно дифференциала d_n и ни один элемент группы E_n^{0q} не является границей. Так как $E_{n+1} = H(E_n)$, то, следовательно,

$$E_{n+1}^{0q} = \operatorname{Ker}\left(E_n^{0q} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,\, q-n+1}\right),$$

$$E_{n+1}^{n,\, q-n} = E_n^{n,\, q-n} / \operatorname{Im}\left(E_n^{0,\, q-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,\, q-n}\right).$$

Из подсчета степеней ясно, что $d_{n+1} = d_{n+2} = \ldots = 0$, так что в пределе получаем изоморфизмы

$$E_\infty^{0q} = \operatorname{Ker}(E_n^{0q} \to E_n^{n,\, q-n+1}),$$

$$E_\infty^{n,\, q-n} = E_n^{n,\, q-n} / \operatorname{Im}(E_n^{0,\, q-1} \to E_n^{n,\, q-n}).$$

Определим, кроме того, гомоморфизм

$$E_n^{n,\, i-n} \to H^i(K)$$

как композицию эпиморфизма $E_n^{n,\,i-n} \to E_\infty^{n,\,i-n}$ и мономорфизма $E_\infty^{n,\,i-n} \to H^i(K)$ и аналогично гомоморфизм

$$H^i(K) \to E_n^{0,\,i}$$

как композицию эпиморфизма $H^i(K) \to E_\infty^{0,\,i}$ и мономорфизма $E_\infty^{0,\,i} \to E_n^{0,\,i}$. Мы получим для любого i точную последовательность

$$E_n^{0,\,i-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,\,i-n} \to H^i(K) \to E_n^{0,\,i} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,\,i+1-n},$$

что и доказывает теорему.

Аналогичные рассуждения приводят к следующему результату.

Теорема 4.6.2. *Пусть K — комплекс с фильтрацией. Предположим, что существуют такие целые $r \geqslant 1$ и $n \geqslant r$, что $E_r^{pq} = 0$ для $q \neq 0,\ n$. Если фильтрация в K регулярна, то имеем точную последовательность*

$$\ldots \to E_r^{i,\,0} \to H^i(K) \to E_r^{i-n,\,n} \to E_r^{i+1,\,0} \to H^{i+1}(K) \to \ldots.$$

Замечание 4.6.1. Более общий на первый взгляд случай, когда $E_r^{pq} = 0$ для $p \neq p_0,\ p_1$ (соответственно $E_r^{pq} = 0$ для $q \neq q_0,\ q_1$), приводится к предыдущему надлежаще выбранным преобразованием фильтрации (соответственно градуировки) комплекса K.

В книге А. Картана и Эйленберга (Cartan H., Eilenberg S., Homological Algebra, Princeton University Press, 1956 [1])) имеются более детальные результаты (см. гл. XV, § 5 этой книги).

4.7. Члены E_0, E_1, E_2.

Пусть K — дифференциальный модуль с фильтрацией. Ясно, что

$$Z_0^p = K_p, \qquad Z_{-1}^{p+1} = K_{p+1}, \qquad dZ_{-1}^{p-1} \subset K_{p+1},$$

и, следовательно,

$$E_0^p = K_p / K_{p+1}.$$

Поэтому *член E_0 совпадает с градуированным модулем, связанным с K*, а дифференциал d_0 получается из дифференциала d в K при переходе к фактор-модулям.

Отсюда имеем

$$E_1^p = H(K_p / K_{p+1}).$$

Дифференциал d_1 легко вычисляется. Действительно, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to K_{p+1}/K_{p+2} \to K_p/K_{p+2} \to K_p/K_{p+1} \to 0. \qquad (*)$$

[1]) Имеется русский перевод: Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960. — *Прим. ред.*

Она дает точную последовательность когомологий и, в частности, гомоморфизмы

$$\delta : E_1^p = H(K_p/K_{p+1}) \to H(K_{p+1}/K_{p+2}) = E_1^{p+1}.$$

Именно эти гомоморфизмы составляют искомый дифференциал d_1. Действительно, рассмотрим элемент $\alpha \in H(K_p/K_{p+1})$, представленный циклом $z \in Z(K_p \bmod K_{p+1}) = Z_1^p$. По определению, $d_1\alpha$ представлен элементом $dz \in Z(K_{p+1} \bmod K_{p+2})$. Но именно так определяется третий гомоморфизм δ, связанный с точной последовательностью когомологий.

Отсюда следует, что член E_2 есть модуль когомологий комплекса, который получается, если снабдить градуированную группу

$$E_1 = \sum H(K_p/K_{p+1})$$

дифференциалом δ, определенным точными последовательностями (*).

4.8. Спектральная последовательность двойного комплекса.

Пусть

$$K = \sum K^{pq}$$

— двойной комплекс с дифференциалами

$$d' : K^{pq} \to K^{p+1,\, q}, \qquad d'' : K^{pq} \to K^{p,\, q+1},$$

удовлетворяющими условиям $d'd'' + d''d' = 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать K как „простой“ комплекс, используя полную градуировку

$$K^n = \sum_{p+q=n} K^{pq}$$

и полный дифференциал $d = d' + d''$.

Подгруппы

$${}'K_p = \sum_{i \geqslant p} K^{ij}$$

определяют *первую фильтрацию* комплекса K. Члены соответствующей спектральной последовательности обозначим через ${}'E_r^{pq}$. Мы вычислим их сейчас для $r = 1, 2$.

Имеем прежде всего

$${}'E_1^p = H({}'K_p/{}'K_{p+1}).$$

Но ${}'K_p/{}'K_{p+1}$ канонически отождествляется с градуированной группой

$$K^{p*} = \sum_j K^{pj},$$

и это отождествление преобразует дифференциал d_0 в d'', так как d' отображает $'K_p$ в $'K_{p+1}$. Имеем поэтому

$$'E_1^p = {}''H(K^{p*}),$$

где индекс $''$ напоминает о том, что когомологии вычислены с помощью дифференциала d''. Для вычисления дифференциала d_1 мы должны теперь явно выразить оператор δ, связанный с точной последовательностью

$$0 \to {}'K_{p+1}/{}'K_{p+2} \to {}'K_p/{}'K_{p+2} \to {}'K_p/{}'K_{p+1} \to 0$$

или, что то же самое, с точной последовательностью

$$0 \to K^{p+1,\,*} \to K^{p+1,\,*} + K^{p*} \to K^{p*} \to 0.$$

В этой последовательности на крайних членах действует d'', а на среднем члене — дифференциал, индуцированный оператором d (т. е. дифференциал, равный d на компоненте K^{p*} и d'' — на компоненте $K^{p-1,\,*}$). Так как $d = d' + d''$ и так как коциклы в третьем члене аннулируются дифференциалом d'', то *оператор*

$$\delta : {}''H(K^{p*}) \to {}''H(K^{p+1,\,*})$$

индуцирован дифференциалом d'.

Следовательно, если ввести на группе $''H(K)$, которая равна группе d''-когомологий комплекса K, градуировку, определенную формулой

$$''H(K) = \sum {}''H(K^{p*}),$$

и дифференциал, индуцированный гомоморфизмами

$$d' : K^{p*} \to K^{p+1,\,*},$$

то получим канонические изоморфизмы

$$'E_2^p = {}'H^p({}''H(K)).$$

Для достижения полного результата мы должны еще выявить вторую градуировку члена E_2. Группа $'E_2^{pq}$ образована элементами из $'E_2^p$, которые можно представить элементами из K степени $p+q$, при условии, что в K рассматривается полная градуировка. Но очевидно, что $'E_2^p$ есть множество элементов группы $'E_2$, представленных элементами из K^{p*}. Элементы полной степени $p+q$ образуют среди них группу K^{pq}. Поэтому если обозначить через $''H^q(K)$ группу когомологий комплекса K степени q, вычисленную с помощью *второго*

дифференциала и *второй* градуировки в K, то мы получаем следующую окончательную формулу:

$$\boxed{'E_2^{pq} = 'H^p({}''H^q(K)).}$$

Этот результат можно, впрочем, доказать прямо, исходя из формулы

$$E_2^{pq} = Z_2^{pq}/(B_1^{pq} + Z_1^{p+1,\, q-1}),$$

определяющей член E_2. Действительно, Z_2^{pq} образована, очевидно, такими элементами из K вида $x = x^{pq} + x^{p+1, q-1} + \ldots$, что

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= d''x^{pq} \\ 0 &= d''x^{p+1,\, q-1} + d'x^{pq}. \end{aligned}} \qquad (1)$$

С другой стороны, $Z_1^{p+1,\, q-1}$ образована теми элементами $x \in Z_2^{pq}$, для которых x^{pq} равен нулю. Наконец, B_1^{pq} образована элементами $x \in Z_2^{pq}$, которые являются кограницами элементов группы $'K_{p-1}$, т. е. для которых можно разрешить систему

$$\begin{cases} x^{pq} = d''x^{p,\, q-1} + d'x^{p-1,\, q}, \quad \text{где} \quad d''x^{p-1,\, q} = 0 \\ x^{p+1,\, q-1} = d''x^{p+1,\, q-2} + d'x^{p,\, q-1} \\ x^{p+2,\, q-2} = d''x^{p+2,\, q-3} + d'x^{p+1,\, q-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Так как $Z_1^{p+1,\, q-1}$ содержит все элементы вида

$$x^{p+2,\, q-2} + x^{p+3,\, q-3} + \ldots,$$

то каждый элемент из $'E_2^{pq}$ может быть представлен элементом

$$x = x^{pq} + x^{p+1,\, q-1},$$

удовлетворяющим (1). Если, кроме того, такой элемент определяет элемент 0 в $'E_2^{pq}$, то справедливо соотношение вида

$$\boxed{x^{pq} = d''x^{p,\, q-1} + d'x^{p-1,\, q}, \quad \text{где} \quad d''x^{p-1,\, q} = 0.} \qquad (2)$$

Обратно, рассмотрим решение уравнений (1), для которого можно разрешить (2), и положим

$$x^{p+1,\, q-1} = d'x^{p,\, q-1} + z^{p+1,\, q-1}.$$

Используя (1) и (2), будем иметь

$$d''z^{p+1,\,q-1} = d''x^{p+1,\,q-1} - d''d'x^{p,\,q-1} = -d'x^{pq} + d'd''x^{p,\,q-1} =$$
$$= -d'x^{pq} + d'(x^{pq} - d'x^{p-1,\,q}) = 0.$$

Следовательно, элемент $x = x^{pq} + x^{p+1,\,q-1}$ является суммой элемента $z^{p+1,\,q-1}$ из $Z_1^{p+1,\,q-1}$ и элемента $d''x^{p,\,q-1} + d'x^{p-1,\,q} + d'x^{p,\,q-1} = d\left(x^{p-1,\,q} + x^{p,\,q-1}\right)$ из B_1^{pq}, т. е. определяет 0 в $'E_2^{pq}$.

Итак, группа $'E_2^{pq}$ *образована решениями системы* (1) *по модулю тех решений, для которых можно разрешить* (2). Рассмотрим некоторое решение системы (1). Первое уравнение показывает, что x^{pq} определяет элемент группы $''H^q(K)$, первая степень которого равна p, а второе — что этот элемент является коциклом относительно d', т. е. определяет элемент группы $'H^p\left(''H^q(K)\right)$. Очевидно, что каждый элемент этой последней группы определяется некоторым решением системы (1). Для того чтобы при этом получился элемент 0 из $'H^p\left(''H^q(K)\right)$, необходимо и достаточно, чтобы элемент из $''H^q(K)$, определяемый коциклом x^{pq}, был d'-кограницей некоторого элемента из $''H^q(K)$, первая степень которого равна $p-1$. Следовательно, этот элемент будет представлен коциклом $x^{p-1,\,q}$, удовлетворяющим условию $d''x^{p-1,\,q} = 0$, а его d'-кограница будет представлена коциклом $d'x^{p-1,\,q}$. Так как x^{pq} и $d'x^{p-1,\,q}$ должны определять один и тот же класс в d''-когомологиях, то должно иметь место равенство $x^{pq} - d'x^{p-1,\,q} = d''x^{p,\,q-1}$. Другими словами, группа $'H^p\left(''H^q(K)\right)$ отождествляется с группой решений системы (1) по модулю решений системы (2). Это снова определяет канонический изоморфизм

$$'E_2^{pq} = 'H^p\left(''H^q(K)\right).$$

В заключение мы выделим ввиду его практической важности один частный случай теоремы 4.4.1.

Теорема 4.8.1. *Пусть K — двойной коцепной комплекс* $\left(K^{pq} = 0,\right.$ *если* $p < 0$ *или* $\left.q < 0\right)$. *Предположим, что*

$$'H^p\left(''H^q(K)\right) = 0 \quad \textit{для } q \geqslant 1.$$

Пусть L — подкомплекс в K, образованный такими элементами

$$x = \sum x^{p0}, \quad \textit{что} \quad d''x^{p0} = 0.$$

Тогда вложение $L \to K$ индуцирует изоморфизм когомологий комплекса L на когомологии комплекса K.

Действительно, рассмотрим L как двойной комплекс, в котором вторая градуировка и второй дифференциал тривиальны. В первой

спектральной последовательности комплекса L имеем

$$'E_2^{pq}(L) = 'H^p(''H^q(L)).$$

Поэтому, очевидно,

$$'E_2^{pq}(L) = 0, \quad \text{если} \quad q \neq 0, \quad 'E_2^{p0}(L) = H^p(L).$$

С другой стороны, по предположению

$$'E_2^{pq}(K) = 0, \quad \text{если} \quad q \neq 0,$$

и

$$'E_2^{p0}(K) = 'H^p(''H^0(K)).$$

Но так как биградуировка в K положительна, то ясно, что $''H^0(K)$ канонически отождествляется с L, и поэтому

$$'E_2^{p0}(K) = H^p(L).$$

Отсюда следует, что вложение $L \to K$ изоморфно отображает первую спектральную последовательность комплекса L на первую спектральную последовательность комплекса K. Так как фильтрации в K и L регулярны, то искомый результат является следствием теоремы 4.3.1.

Предыдущий результат дает, очевидно, некоторую интерпретацию канонических гомоморфизмов

$$'E_2^{p0}(K) \to H^p(K),$$

справедливых для каждого двойного коцепного комплекса и вытекающих из результатов п. 4.5.

§ 5. ГРУППЫ $\mathrm{Ext}_A^n(L, M)$ И $\mathrm{Tor}_n^A(L, M)$.

В этом параграфе через A обозначается кольцо с единичным элементом. Для заданных A-модулей L и M будем писать $\mathrm{Hom}(L, M)$ вместо $\mathrm{Hom}_A(L, M)$ и $L \otimes M$ вместо $L \underset{A}{\otimes} M$.

5.1. Проективные резольвенты и инъективные резольвенты.

Пусть L — левый A-модуль. *Проективной резольвентой* модуля L называют любую *гомологическую* резольвенту модуля L

$$\ldots \to L_1 \to L_0 \to L \to 0,$$

составленную из проективных A-модулей L_i. Аналогично *инъективной резольвентой* модуля L называют любую *когомологическую* резольвенту модуля L

$$0 \to L \to L^0 \to L^1 \to \ldots,$$

составленную из инъективных A-модулей L^i. Существование таких резольвент немедленно вытекает из того, что каждый модуль является фактор-модулем (соответственно подмодулем) проективного (соответственно инъективного) модуля. Мы всегда будем рассматривать проективную (соответственно инъективную) резольвенту модуля L как цепной (соответственно коцепной) комплекс, ациклический в размерности (соответственно степени) $n \neq 0$.

Теорема 5.1.1. *Пусть L, M—два левых A-модуля, f—гомоморфизм модуля L в M и L_*, M_* (соответственно L^*, M^*)—проективные (соответственно инъективные) резольвенты модулей L, M. Существует гомоморфизм g первой резольвенты во вторую, совместимый с f, и g определен однозначно с точностью до гомотопии.*

Рассмотрим, например, проективный случай. Мы должны дополнить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "d"] & L_0 \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

гомоморфизмами $g_n : L_n \to M_n$ таким образом, чтобы полученная диаграмма оказалась коммутативной. Рассмотрим $f \circ p : L_0 \to M$. Так как L_0 проективен, то существует такой $g_0 : L_0 \to M_0$, что $f \circ p = p \circ g_0$. Построив g_0, рассмотрим $g_0 \circ d : L_1 \to M_0$. В силу точности этот гомоморфизм отображает L_1 в циклы из M_0, т. е. в $d(M_1)$. Так как L_1 проективен, существует такой $g_1 : L_1 \to M_1$, что $g_0 \circ d = d \circ g_1$. Продолжая так шаг за шагом, получаем требуемый гомоморфизм g. Единственность его с точностью до гомотопии доказывается аналогичными рассуждениями.

Применяя это утверждение к случаю, в котором $L = M$ и f — тождественный гомоморфизм, мы находим, что *две проективные (соответственные инъективные) резольвенты произвольного модуля всегда гомотопно эквивалентны.*

Теорема 5.1.2. *Пусть $0 \to L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \to 0$ — точная последовательность левых A-модулей. Если заданы проективные резольвенты L'_* и L''_* для L' и L'', то существует такая проективная резольвента L_* для L, что имеет место точная последовательность*

$$0 \to L'_* \to L_* \to L''_* \to 0,$$

совместимая с заданной точной последовательностью. Аналогично, если заданы инъективные резольвенты L'^* и L''^* для L' и L'', то существуют инъективная резольвента L^* для L и точная последовательность

$$0 \to L'^* \to L^* \to L''^* \to 0,$$

совместимая с заданной точной последовательностью.

Рассмотрим, например, проективный случай и построим последовательно модули L_n (полагая $L_n = 0$ для $n < 0$). Мы будем обозначать множество циклов степени n в L'_* через Z'_n и использовать аналогичные обозначения для L_* и L''_*.

Предположим, что L_* уже построен в размерностях $\leqslant n - 1$. Тогда имеем *коммутативную* диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & L'_{n-1} & \to & L_{n-1} & \to & L''_{n-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L'_{n-2} & \to & L_{n-2} & \to & L''_{n-2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L'_{n-3} & \to & L_{n-3} & \to & L''_{n-3} & \to & 0,
\end{array}$$

в которой строчки и столбцы *точны*. Отсюда легко получаем, что последовательность $0 \to Z'_{n-1} \to Z_{n-1} \to Z''_{n-1} \to 0$ точна. Очевидно,

что для построения L_n достаточно дополнить диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & L_n' & & & & L_n'' \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & \to & Z_{n-1}' & \to & Z_{n-1} & \to & Z_{n-1}'' \to 0 \end{array}$$

до *коммутативной* диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L_n' & \to & L_n & \to & L_n'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & Z_{n-1}' & \to & Z_{n-1} & \to & Z_{n-1}'' & \to & 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

в которой строчки и столбцы *точны* и в которой L_n *проективен*. Возможность этого вытекает из теоремы 1.3.2, что доказывает нашу теорему.

Можно обобщить предыдущий результат, определив понятие проективной (соответственно инъективной) резольвенты для произвольного *комплекса*. Будем исходить, например, из комплекса L_* A-модулей с дифференциалом степени -1. В этом случае *проективной резольвентой* комплекса L_* называют *точную последовательность комплексов*

$$\ldots \to L_{*1} \to L_{*0} \to L_* \to 0, \tag{1}$$

удовлетворяющую следующим условиям: *для каждого целого числа n последовательности модулей и гомоморфизмов*

$$\begin{gathered} \ldots \to C_n(L_{*1}) \to C_n(L_{*0}) \to C_n(L_*) \to 0 \\ \ldots \to Z_n(L_{*1}) \to Z_n(L_{*0}) \to Z_n(L_*) \to 0 \\ \ldots \to B_n(L_{*1}) \to B_n(L_{*0}) \to B_n(L_*) \to 0 \\ \ldots \to H_n(L_{*1}) \to H_n(L_{*0}) \to H_n(L_*) \to 0, \end{gathered}$$

полученные из (1), *являются проективными резольвентами для* $C_n(L_*) = L_n$, $Z_n(L_*)$, $B_n(L_*)$ *и* $H_n(L_*)$ *соответственно*.

Аналогично определяются инъективные резольвенты.

Теорема 5.1.3. *Каждый комплекс A-модулей допускает проективную* (*соответственно инъективную*) *резольвенту*.

Установим, например, существование инъективных резольвент для комплекса L^*, в котором дифференциал имеет степень 1. Положим

$$Z^n = Z^n(L^*), \quad B^n = B^n(L^*), \quad H^n = H^n(L^*).$$

Предположим уже построенными инъективные резольвенты $I^*(L^n)$, $I^*(Z^n)$, $I^*(B^n)$ и $I^*(H^n)$ для модулей L^n, Z^n, B^n и H^n и такие гомомор-

физмы этих резольвент, что для любого целого числа n имеем *коммутативные* диаграммы *точных* последовательностей следующего вида:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I^*(Z^n) & \to & I^*(L^n) & \to & I^*(B^{n+1}) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & Z^n & \to & L^n & \to & B^{n+1} & \to & 0 \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I^*(B^n) & \to & I^*(Z^n) & \to & I^*(H^n) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & B^n & \to & Z^n & \to & H^n & \to & 0. \end{array} \tag{3}$$

Тогда будем иметь, как непосредственно проверяется, инъективную резольвенту комплекса L^*, в которой $L^{*n} = \sum I^n(L^p)$. Дифференциал комплекса L^{*n} индуцирован гомоморфизмами $I^n(L^p) \to I^n(L^{p+1})$, которые получаются композицией гомоморфизмов

$$I^*(L^p) \to I^*(B^{p+1}), \quad I^*(B^{p+1}) \to I^*(Z^{p+1}), \quad I^*(Z^{p+1}) \to I^*(L^{p+1}),$$

фигурирующих в диаграммах (2) и (3), а гомоморфизм $L^{*n} \to L^{*n+1}$ определяется гомоморфизмами $I^n(L^p) \to I^{n+1}(L^p)$.

Отсюда ясно, что все сводится к построению диаграмм (2) и (3).

Выберем для этого произвольно $I^*(B^0)$ и $I^*(H^0)$. По теореме 5.1.2 можно построить (3) для $n=0$. Построив $I^*(Z^0)$, выберем произвольно $I^*(B^1)$. Тогда по тем же причинам, что и выше, можно построить (2) для $n=0$. Сделав это, выберем произвольно $I^*(H^1)$. Тогда можно построить (3) для $n=1$, а затем, выбирая произвольно $I^*(B^2)$, построим (2) для $n=1$. Поступая так шаг за шагом, мы осуществим построение для всех $n \geqslant 0$. Аналогичные рассуждения позволяют осуществить построение для $n \leqslant 0$.

5.2. Производные функтора.

Рассмотрим функтор $X \to F(X)$ на категории левых A-модулей со значениями в категории абелевых групп. Мы будем считать F *аддитивным, ковариантным и точным справа.*

Для каждого левого A-модуля X выберем проективную резольвенту X_*. Положим

$$F(X_*) = \sum F(X_n)$$

и определим на этой градуированной группе дифференциал, полученный из дифференциала в X_* посредством F. *Производными* функтора F мы будем называть функторы

$$F_n : X \to H_n(F(X_*)).$$

Чтобы оправдать это определение, необходимо задать для каждого гомоморфизма $u: X \to Y$ гомоморфизмы $F_n(u): F_n(X) \to F_n(Y)$. Для этого достаточно продолжить u до гомоморфизма $X_* \to Y_*$, что возможно, и притом единственным с точностью до гомотопии способом, в силу теоремы 5.1.1.

Само собой разумеется, что если изменить выбор резольвенты X_*, сопоставляемой каждому модулю X, то функторы F_n остаются теми же с точностью до изоморфизма.

Установим основные свойства функторов F_n. Это, очевидно, ковариантные и аддитивные функторы. С другой стороны, имеем канонический изоморфизм

$$\boxed{F_0 = F,}$$

так как из точной последовательности

$$X_1 \xrightarrow{d} X_0 \to X \to 0$$

и из предположения, что F точен справа, вытекает точная последовательность

$$F(X_1) \to F(X_0) \to F(X) \to 0.$$

Кроме того, ясно, что

$$\boxed{F_n(X) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \quad \text{если} \quad X \quad \text{проективен},}$$

так как в этом случае можно считать, что X_* равен нулю в размерностях $n \geqslant 1$.

Рассмотрим, наконец, точную последовательность

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0.$$

Можно выбрать проективные резольвенты этих модулей так, чтобы иметь точную последовательность

$$0 \to X'_* \to X_* \to X''_* \to 0.$$

Так как X''_* *проективен*, то X'_* отождествляется с *прямым слагаемым* в X_*, так что последовательность комплексов

$$0 \to F(X'_*) \to F(X_*) \to F(X''_*) \to 0$$

также точна. Как следствие получаем гомологическую точную последовательность следующего вида:

$$\boxed{\begin{aligned} &\ldots \to F_n(X') \to F_n(X) \to F_n(X'') \xrightarrow{\delta} F_{n-1}(X') \to \ldots \\ &\ldots \to F_1(X'') \xrightarrow{\delta} F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0. \end{aligned}}$$

Читателю предоставляется проверка того, что полученные таким способом гомоморфизмы

$$F_n(X'') \to F_{n-1}(X')$$

не зависят от выбора проективных резольвент рассматриваемых модулей X', X и X''.

В частности, отсюда следует, что для того чтобы последовательность

$$0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0$$

была точной, *достаточно*, чтобы $F_1(X'') = 0$.

Рассмотрим теперь *контравариантный* и *точный справа* функтор F. В этом случае $F(X_*)$ является коцепным комплексом. Полагаем

$$F^n(X) = H^n(F(X_*)).$$

Справедливы свойства, совершенно аналогичные предыдущим:

$$F^0 = F;$$

$F^n(X) = 0$ для $n \geqslant 1$, если X проективен;
с каждой точной последовательностью модулей связана когомологическая точная последовательность

$$0 \to F(X'') \to F(X) \to F(X') \xrightarrow{\delta} F^1(X'') \to \ldots .$$

Если, напротив, изучать *точные слева* функторы, то для каждого A-модуля X нужно использовать *инъективную* резольвенту X^*.

Для заданного аддитивного, *ковариантного* и *точного слева* функтора F определим

$$F^n(X) = H^n(F(X^*));$$

если, напротив, F есть *контравариантный* и *точный слева* функтор, то положим

$$F_n(X) = H_n(F(X^*)).$$

Читателю предлагается сформулировать и доказать свойства этих производных функторов.

Заметим, что аналогичными методами можно изучать функторы, которые не предполагаются точными слева или справа. По этому вопросу читатель может обратиться к книге А. Картана и С. Эйленберга.

5.3. Функторы $\mathrm{Ext}^n(L, M)$ и $\mathrm{Tor}_n(L, M)$.

Пусть L и M — два левых A-модуля. Рассмотрим функторы

$$F(X) = \mathrm{Hom}(L, X), \quad G(X) = \mathrm{Hom}(X, M).$$

Функтор F является аддитивным, ковариантным и точным слева, тогда как G является аддитивным, контравариантным и точным справа.

Можно образовать, следовательно, производные функторы

$$F^n(X) = H^n(\mathrm{Hom}(L, X^*)),$$

$$G^n(X) = H^n(\mathrm{Hom}(X_*, M)).$$

В частности, можно рассмотреть группы

$$F^n(M) = H^n(\mathrm{Hom}(L, M^*)); \quad G^n(L) = H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M)).$$

Мы покажем, что они канонически изоморфны. Точнее, образуем двойной комплекс $\mathrm{Hom}(L_*, M^*)$ и, исходя из $L_0 \to L$, $M \to M^0$, построим гомоморфизмы комплексов

$$\mathrm{Hom}(L_*, M) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*) \leftarrow \mathrm{Hom}(L, M^*).$$

Мы покажем, что эти гомоморфизмы индуцируют изоморфизмы в когомологиях. Заметим сначала, что образ группы $\mathrm{Hom}(L_*, M)$ в двойном комплексе $\mathrm{Hom}(L_*, M^*)$ образован элементами, вторая степень которых равна 0 и которые аннулируются дифференциалом d''. Значит, чтобы доказать, что гомоморфизм

$$H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M)) \to H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M^*))$$

является изоморфизмом, достаточно показать, что первая спектральная последовательность этого двойного комплекса вырождена. Очевидно, что

$$'E_1^{pq} = H^q(\mathrm{Hom}(L_p, M^*)) = \mathrm{Hom}\big(L_p, H^q(M^*)\big)$$

в силу проективности модуля L_p. Так как $H^q(M^*) = 0$ для $q \neq 0$, то наше утверждение доказано. Можно доказать аналогичное утверждение для гомоморфизма $\mathrm{Hom}(L, M^*) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*)$.

Для заданных левых A-модулей L и M положим

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Ext}^n(L, M) &= H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M)) = \\ &= H^n(\mathrm{Hom}(L, M^*)) = H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)).\end{aligned}}$$

Для определенности можно условиться, что для каждого модуля X выбраны раз и навсегда проективная резольвента X_* и инъективная резольвента X^*. Ясно, что $\mathrm{Ext}^n(L, M)$ есть аддитивный, ковариантный по отношению к M и контравариантный по отношению к L функтор. Имеем

$$\boxed{\mathrm{Ext}^0(L, M) = \mathrm{Hom}(L, M).}$$

С другой стороны,

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{Ext}^n(L, M)=0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \quad \text{если} \quad L \text{ проективен}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{или} \quad \text{если} \quad M \text{ инъективен.}\end{aligned}}$$

Наконец, каждой точной последовательности

$$0 \to L' \to L \to L'' \to 0$$

соответствует точная последовательность

$$\boxed{0 \to \operatorname{Hom}(L'', M) \to \operatorname{Hom}(L, M) \to \operatorname{Hom}(L', M) \to \operatorname{Ext}^1(L'', M) \to \dots}$$

и каждой точной последовательности

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

соответствует точная последовательность

$$\boxed{0 \to \operatorname{Hom}(L, M') \to \operatorname{Hom}(L, M) \to \operatorname{Hom}(L, M'') \to \operatorname{Ext}^1(L, M') \dots}$$

Заметим, что для определения операторов

$$\delta : \operatorname{Ext}^n(L, M'') \to \operatorname{Ext}^{n+1}(L, M'),$$

фигурирующих в этой последовательности, нужно в соответствии с предыдущим пунктом рассмотреть точную последовательность

$$0 \to M'^* \to M^* \to M''^* \to 0$$

и образовать точную последовательность комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}(L, M'^*) \to \operatorname{Hom}(L, M^*) \to \operatorname{Hom}(L, M''^*) \to 0,$$

но можно также рассмотреть точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(L_*, M') \to \operatorname{Hom}(L_*, M) \to \operatorname{Hom}(L_*, M'') \to 0.$$

То, что операторы δ, полученные из этих двух точных последовательностей комплексов, совпадают, доказывается „погружением“ их в точную последовательность двойных комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}(L_*, M'^*) \to \operatorname{Hom}(L_*, M^*) \to \operatorname{Hom}(L_*, M''^*) \to 0.$$

Рассмотрим теперь правый A-модуль L и левый A-модуль M и образуем функторы

$$F(X) = L \otimes X, \quad G(Y) = Y \otimes M,$$

определенные соответственно на категории левых A-модулей и на категории правых A-модулей. Оба они аддитивные, ковариантные и

точные справа функторы. Можно, следовательно, рассмотреть производные функторы

$$F_n(X) = H_n(L \otimes X_*), \quad G_n(Y) = H_n(Y_* \otimes M).$$

Мы покажем, что группы

$$F_n(M) = H_n(L \otimes M_*), \quad G_n(L) = H_n(L_* \otimes M)$$

канонически изоморфны.

Для этого достаточно доказать, что гомоморфизмы

$$L_* \otimes M \leftarrow L_* \otimes M_* \rightarrow L \otimes M_*,$$

определенные отображениями $M_0 \rightarrow M$ и $L_0 \rightarrow L$, индуцируют изоморфизмы в гомологиях. Мы установим это, вычислив две спектральные последовательности двойного комплекса $L_* \otimes M_*$. Очевидно,

$$'E^1_{pq} = H_q(L_p \otimes M_*) = L_p \otimes H_q(M_*),$$

так как L_p проективен. Но $H_q(M_*) = 0$ для $q \neq 0$ и $H_0(M_*) = M$, откуда немедленно следует требуемый результат.

Положим

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n(L, M) = H_n(L_* \otimes M) = H_n(L \otimes M_*) = H_n(L_* \otimes M_*).}$$

Ясно, что получены ковариантные и аддитивные по отношению к L и M функторы. С другой стороны, имеем, очевидно,

$$\boxed{\mathrm{Tor}_0(L, M) = L \otimes M.}$$

Если модуль L *плоский* (тем более если он проективный), то

$$H_n(L \otimes M_*) = L \otimes H_n(M_*)$$

и, следовательно,

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n(L, M) = 0 \text{ для } n \geqslant 1, \text{ если } L \text{ или } M \text{ — плоский модуль.}}$$

Наконец, каждой точной последовательности $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ соответствует гомологическая точная последовательность

$$\boxed{\ldots \rightarrow \mathrm{Tor}_1(L'', M) \rightarrow L' \otimes M \rightarrow L \otimes M \rightarrow L'' \otimes M \rightarrow 0.}$$

Отсюда вытекает, что *плоские* модули *характеризуются* свойством

$$\mathrm{Tor}_1(X, M) = 0 \text{ для всех } X.$$

Отметим как следствие из свойств функторов Tor_n следующий результат.

Теорема 5.3.1. *Для того чтобы левый модуль L над кольцом A был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для каждого правого идеала конечного типа I из A гомоморфизм $I \otimes L \to L$, определенный вложением $I \to A$, был мономорфизмом.*

Действительно, предположим, что условие выполнено. Переходя к индуктивному пределу, видим, что оно выполняется также, если I не имеет конечного типа. С другой стороны, из точной последовательности

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

и из того, что A проективно, следует точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(A/I, L) \to I \otimes L \to L \to (A/I) \otimes L \to 0.$$

Наша гипотеза означает поэтому, что

$$\mathrm{Tor}_1(X, L) = 0$$

для любого *однородного*[1]) A-модуля X.

Так как каждый модуль X с n образующими допускает такой подмодуль с $n-1$ образующей, что фактор-модуль является однородным, то, используя точную последовательность для функторов Tor, получаем, что предыдущее соотношение справедливо для всякого A-модуля конечного типа. Так как любой A-модуль есть индуктивный предел A-модулей конечного типа и так как функтор $X \to \mathrm{Tor}_n(X, L)$, очевидно, совместим с образованием индуктивных пределов, то отсюда заключаем, что это соотношение справедливо без ограничений. Следовательно, модуль L является плоским.

Как следствие получаем, что *модуль над кольцом главных идеалов является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет кручения.*

Когда основное кольцо A является *кольцом главных идеалов*, каждый подмодуль проективного (т. е. свободного) модуля проективен и каждый фактор-модуль инъективного модуля инъективен. Поэтому для любого A-модуля X можно образовать проективные (соответственно инъективные) резольвенты, равные нулю в размерностях $n \geqslant 2$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Ext}^n(L, M) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Tor}_n(L, M) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant 2.$$

В этом случае пишем просто

$$\mathrm{Ext}^1(L, M) = \mathrm{Ext}(L, M), \quad \mathrm{Tor}_1(L, M) = \mathrm{Tor}(L, M).$$

[1]) Однородным A-модулем называется модуль вида A/I, где I — идеал в кольце A. — *Прим. ред.*

5.4. Комплексы гомоморфизмов.

Над произвольным основным кольцом A рассмотрим комплекс L_*, дифференциал которого имеет степень -1, комплекс M^*, дифференциал которого имеет степень $+1$, и двойной комплекс

$$\mathrm{Hom}(L_*, M^*) = \sum \mathrm{Hom}(L_p, M^q).$$

В п. 2.8 показано, что имеются канонические гомоморфизмы

$$H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \to \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_p(L_*), H^q(M^*)).$$

Мы докажем сейчас, что эти гомоморфизмы являются изоморфизмами в предположении (впрочем, как мы увидим, слишком сильном), что все модули L_n, $B_n(L_*)$, $Z_n(L_*)$ и $H_n(L_*)$ проективны.

Действительно, употребляя очевидные обозначения, напишем точную последовательность

$$0 \to Z_* \xrightarrow{j} L_* \xrightarrow{d} B_* \to 0.$$

Так как B_* проективен, то получаем точную последовательность двойных комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}(B_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(Z_*, M^*) \to 0,$$

откуда, переходя к когомологиям, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[dr, "f"] & H(\mathrm{Hom}(Z_*, M^*)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "g"] & H(\mathrm{Hom}(B_*, M^*)) \arrow[r, "d'^*"] \arrow[dr, "h"] & H(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \\
0 \to & \mathrm{Hom}(H(L_*), H(M^*)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z_*, H(M^*)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_*, H(M^*)) \to 0.
\end{tikzcd}$$

Вторая строчка этой диаграммы вытекает из точной последовательности

$$0 \to B_* \to Z_* \to H(L_*) \to 0$$

и из предположения, что модуль $H(L_*)$ проективен.

Покажем теперь, что предыдущая диаграмма коммутативна. Единственный нетривиальный момент состоит в доказательстве того, что третий гомоморфизм δ получается очевидным образом из вложения $B_* \to Z_*$. Для этого возьмем класс когомологий α в $\mathrm{Hom}(Z_*, M^*)$, представленный коциклом u. Мы должны записать u как образ элемента $v \in \mathrm{Hom}(L_*, M^*)$, т. е. *продолжить* $u: Z_* \to M^*$ до $v: L_* \to M^*$ (что возможно); тогда dv находится в подкомплексе

$$\mathrm{Hom}(B_*, M^*)$$

и определяет элемент $\delta\alpha$.

Пусть w — полученный таким способом элемент группы $\mathrm{Hom}(B_*, M^*)$. Так как гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}(B_*, M^*) \to \mathrm{Hom}(L_*, M^*)$$

получен транспонированием оператора $d: L_* \to B_*$, то имеем соотношение $dv = w \circ d$ между гомоморфизмами $L_* \to M^*$. С другой стороны, имеем $dv = v \circ d \pm d \circ v$ по построению дифференциала в $\operatorname{Hom}(L_*, M^*)$. Можно предположить, что $d \circ v = 0$. Действительно, $d \circ u = 0$, т. е. u отображает Z_* в коциклы из M^*, так что можно (так как Z_* является прямым слагаемым в L_*) наложить такое же ограничение на v. Исходя отсюда, получаем $w \circ d = v \circ d$, и так как v совпадает с u на Z_*, а следовательно, и на B_*, то это показывает, что w является не чем иным, как ограничением гомоморфизма u на B_*. Тем самым, очевидно, наше последнее утверждение доказано.

Если это так, то в предыдущей коммутативной диаграмме g и h являются изоморфизмами, так как Z_* и B_* проективны и имеют в качестве дифференциала 0. Отсюда легко выводится, что f — также изоморфизм. (Сначала устанавливается, что δ — эпиморфизм. Тогда из точности последовательности получаем, что $d'^* = 0$, так что по тем же причинам j'^* — мономорфизм. Остальные рассуждения тривиальны.)

Разумеется, тот же результат можно установить в предположении, что модули M^*, $B(M^*)$, $Z(M^*)$ и $H(M^*)$ инъективны.

Теперь мы можем сформулировать главный результат.

Теорема 5.4.1. *Пусть L_* и M^* — два комплекса левых A-модулей. Предположим, что либо L_* проективен, либо M^* инъективен. Тогда существует спектральная последовательность, в которой*

$$E_2^{pq} = \sum_{i+j=q} \operatorname{Ext}^p\left(H_i(L_*),\ H^j(M^*)\right)$$

и в которой член E_∞ есть биградуированная группа, связанная с когомологиями комплекса $\operatorname{Hom}(L_*, M^*)$ при надлежащей фильтрации.

Рассмотрим, например, случай, когда L_* проективен. Выберем инъективную резольвенту M^{**} комплекса M^*. Рассматривая M^{**} как двойной комплекс, образуем тройной комплекс $\operatorname{Hom}(L_*, M^{**})$. Имеем канонический мономорфизм

$$j: \operatorname{Hom}(L_*, M^*) \to \operatorname{Hom}(L_*, M^{**})$$

на множество элементов, третья степень которых равна 0 и которые аннулируются третьим дифференциалом.

Профильтруем этот тройной комплекс с помощью его первой и второй степеней. Получим спектральную последовательность, для которой

$$E_1^{pq} = \sum_{i+j=p} H^q\left(\operatorname{Hom}\left(L_i, M^{j*}\right)\right).$$

Для заданного j комплекс M^{j*} является резольвентой модуля M^j. Так как L_i есть проективный модуль, то, следовательно,

$$E_1^{p0} = \sum_{i+j=p} \operatorname{Hom}\left(L_i, M^{j*}\right), \quad E_1^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad q \neq 0.$$

Далее, так как третья градуировка положительна, то эта спектральная последовательность сходится, и поэтому *гомоморфизм j индуцирует изоморфизм когомологий.*

Профильтруем теперь тройной комплекс с помощью его третьей степени. Тогда получим спектральную последовательность, для которой

$$E_1^{pq} = H^q(\mathrm{Hom}(L_*, M^{*p})).$$

Для заданного p модули M^{*p}, $Z(M^{*p})$, $B(M^{*p})$ и $H(M^{*p})$ инъективны. В соответствии с частным случаем, исследованным в начале этого пункта (или, скорее, „дуальным“ случаем), получаем

$$E_1^{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Hom}(H_i(L_*), H^j(M^{*p})),$$

причем дифференциал d_1 индуцирован гомоморфизмами $M^{*p} \to M^{*p+1}$. Но последовательность

$$0 \to H^j(M^*) \to H^j(M^{*0}) \to H^j(M^{*1}) \to \ldots$$

есть инъективная резольвента для $H^j(M^*)$. Так как $E_2 = H(E_1)$, то

$$E_2^{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Ext}^p(H_i(L_*), H^j(M^*)),$$

что и требовалось доказать.

Читателю предлагается сформулировать результаты, которые получаются, если предположить, кроме того, что комплекс L_* (или M^*) сводится к одному члену степени 0.

Заметим, что, вообще говоря, предыдущая спектральная последовательность сходится только тогда, когда комплекс $\mathrm{Hom}(L_*, M^*)$ ограничен снизу, например когда L_* — цепной комплекс, а M^* — коцепной комплекс (случай, наиболее важный в приложениях). Однако эти условия не нужны, если третья градуировка ограничена *сверху*. Можно всегда предположить, что это так, когда основное кольцо A является *кольцом главных идеалов.* Кроме того, в этом случае $E_2^{pq} = 0$ для $p \neq 0, 1$. Используя теорему 4.6.2, получаем следующий результат:

Теорема 5.4.2. *Пусть L_* и M^* — комплексы над основным кольцом главных идеалов. Предположим, что либо L_* свободен, либо M^* инъективен. Тогда для каждого n имеем точную последовательность*

$$\boxed{\begin{aligned} 0 \to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Ext}(H_i(L_*), H^j(M^*)) \to H^n(\mathrm{Hom}(L_*, M^*)) \to \\ \to \sum_{i+j=n} \mathrm{Hom}(H_i(L_*), H^j(M^*)) \to 0. \end{aligned}}$$

Пусть, например, L_* — комплекс *свободных* A-модулей. Тогда для каждого A-модуля M имеем точные последовательности

$$\boxed{0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(L_*), M) \to H^n(\operatorname{Hom}(L_*, M)) \to \operatorname{Hom}(H_n(L_*), M) \to 0.}$$

Этот результат позволяет, например, вычислить сингулярные когомологии топологического пространства как функцию от его целочисленных сингулярных гомологий.

5.5. Тензорное произведение комплексов.

Пусть L_* — комплекс правых A-модулей и M_* — комплекс левых A-модулей. Методы предыдущего пункта, надлежащим образом видоизмененные, применимы к исследованию двойного комплекса $L_* \otimes M_*$, когда L_* образован *плоскими* модулями.

Сначала доказывается, что канонический гомоморфизм

$$\sum_{p+q=n} H_p(L_*) \otimes H_q(M_*) \to H_n(L_* \otimes M_*)$$

является изоморфизмом, когда все модули L_*, $Z(L_*)$, $B(L_*)$ и $H(L_*)$ являются плоскими или когда это условие выполнено для M_* вместо L_* (второй случай приводится к первому, если заменить A на обратно изоморфное кольцо). Пусть, далее, L_* — плоский модуль. Выберем проективную резольвенту M_{**} для M_* и изучим тройной комплекс $L_* \otimes M_{**}$. Фильтруя его с помощью первой и второй степени, замечаем, что его гомологии канонически изоморфны гомологиям комплекса $L_* \otimes M_*$; фильтруя его с помощью третьей степени, находим спектральную последовательность, аналогичную спектральной последовательности предыдущего пункта. Получаем окончательно следующий результат:

Теорема 5.5.1. *Пусть L_* — комплекс правых A-модулей и M_* — комплекс левых A-модулей. Предположим, что L_* — плоский модуль. Тогда существует спектральная последовательность, для которой*

$$E^2_{pq} = \sum_{i+j=q} \operatorname{Tor}_p(H_i(L_*), H_j(M_*))$$

и в которой член E^∞ есть биградуированная группа, связанная с гомологиями комплекса $L_* \otimes M_*$ при надлежащей фильтрации.

В случае когда основное кольцо является кольцом главных идеалов, получаем следующую теорему.

Теорема 5.5.2. *Пусть L_* и M_* — комплексы модулей над кольцом главных идеалов. Предположим, что L_* не имеет кручения. Тогда существуют точные последовательности*

$$0 \to \sum_{i+j=n} H_i(L_*) \otimes H_j(M_*) \to H_n(L_* \otimes M_*) \to$$
$$\to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(H_i(L_*),\ H_j(M_*)) \to 0.$$

Этот результат дает возможность вычислять, например, гомологии *декартова* произведения двух базисных симплициальных цепных комплексов, так как они изоморфны гомологиям их *тензорного* произведения. В частности, сингулярные гомологии произведения пространств можно получить (в принципе) с помощью предыдущих формул.

Когда M_* сводится к одному члену степени 0, получаем точные последовательности

$$0 \to H_n(L_*) \otimes M \to H_n(L_* \otimes M) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(L_*),\ M) \to 0.$$

Например, сингулярные гомологии топологического пространства X с коэффициентами в абелевой группе можно вычислить с помощью целочисленных гомологий, используя эти формулы.

5.6. Пример приложения: гомологии и когомологии дискретных групп.

Пусть G — „дискретная" группа (т. е. произвольная группа, которая рассматривается чисто алгебраически). Можно применить результаты настоящего параграфа к *алгебре группы* G над кольцом целых рациональных чисел $\mathbf{Z}$. Напомним, что это есть свободная абелева группа $\mathbf{Z}(G)$, имеющая в качестве базиса множество элементов группы G, умножение в которой сводится к умножению базисных элементов как элементов из G.

Ясно, что левый (соответственно правый) $\mathbf{Z}(G)$-модуль является не чем иным, как абелевой группой L, на которой G действует слева (соответственно справа). Используя более классическую терминологию, можно сказать, что это — линейное представление группы G (соответственно обратно изоморфной группы) в L. Мы будем говорить также, что L есть левый (соответственно правый) G-модуль.

Если L и M — левые G-модули, то группа $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}(G)}(L, M)$, которую мы также будем обозначать через $\mathrm{Hom}_G(L, M)$, есть группа гомоморфизмов u абелевой группы L в абелеву группу M, которые удовлетворяют условию $u(sx) = s \cdot u(x)$ для $s \in G$, $x \in L$. Если L — правый G-модуль и M — левый G-модуль, то группа $L \underset{\mathbf{Z}(G)}{\otimes} M$, которую мы также будем обозначать через $L \underset{G}{\otimes} M$, получается как

фактор-группа тензорного произведения $L \otimes M$ над кольцом $\mathbf{Z}$ по подгруппе, порожденной элементами вида $xs \otimes y - x \otimes sy$. Гомоморфизмы группы $L \underset{G}{\otimes} M$ в абелеву группу N отождествляются поэтому с билинейными отображениями $f : L \times M \to N$, которые удовлетворяют условию $f(xs, y) = f(x, sy)$.

В дальнейшем мы рассматриваем абелеву группу $\mathbf{Z}$ как G-модуль, условливаясь, что $s \cdot x = x$ для $s \in G$, $x \in \mathbf{Z}$. Таким образом, мы имеем здесь „единичное представление“ группы G.

Для заданного левого G-модуля L положим

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}, L) = L^G.$$

Очевидно, что это подгруппа группы L, образованная элементами x, *инвариантными* относительно G, т. е. такими, что $sx = x$ для всех $s \in G$. Точно так же, действуя на этот раз операторами из G справа на $\mathbf{Z}$, положим

$$\mathbf{Z} \underset{G}{\otimes} L = L_G.$$

Это, очевидно, фактор-группа группы L по подгруппе, порожденной элементами вида $sx - x$ ($s \in G$, $x \in L$).

Пусть теперь L — левый G-модуль. Положим

$$H_n(G; L) = \mathrm{Tor}_n(\mathbf{Z}, L),$$
$$H^n(G; L) = \mathrm{Ext}^n(\mathbf{Z}, L),$$

выбирая, разумеется, в качестве основного кольца $\mathbf{Z}(G)$. Имеем, очевидно, следующие свойства:

(I) $H_0(G; L) = L_G$; $H^0(G; L) = L^G$;

(II) пусть $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ — точная последовательность левых G-модулей; тогда имеем точные последовательности

$$\ldots \to H_n(G; L') \to H_n(G; L) \to H_n(G; L'') \to H_{n-1}(G; L') \to \ldots$$
$$\ldots \to H_1(G; L'') \to L'_G \to L_G \to L''_G \to 0$$

и

$$0 \to L'^G \to L^G \to L''^G \to H^1(G; L') \to H^1(G; L) \to \ldots .$$

(III) $H_n(G; L) = 0$ для $n \geqslant 1$, если G-модуль L проективен; $H^n(G; L) = 0$ для $n \geqslant 1$, если G-модуль L инъективен.

Покажем теперь, как можно явно вычислить группы $H_n(G; L)$ и $H^n(G; L)$. Все сводится, очевидно, к построению проективных (например, свободных) резольвент G-модуля $\mathbf{Z}$. Заметим сначала, что если X есть *множество*, на котором G действует слева, то G очевидным образом действует слева на свободной абелевой группе $F(X)$, имеющей в качестве базиса X, и что $F(X)$ есть *свободный* G-модуль тогда и только тогда, когда G действует на X *без неподвижных*

точек (т. е. если $sx = x$ для некоторого $x \in X$ влечет за собой $s = e$). Таким способом можно получить любой свободный G-модуль.

Возьмем теперь *базисный симплициальный цепной комплекс* F_* над кольцом целых рациональных чисел. Предположим, что для каждого $n \geqslant 0$ группа G действует слева на множестве $S_n(F_*)$ n-мерных симплексов из F_* (п. 3.1), а, следовательно, по линейности и на F_n. Разумеется, это действие совместимо с симплициальной структурой в F_*. Тогда F_* становится комплексом свободных G-модулей, если G действует без неподвижных точек на $S_n(F_*)$ для каждого n. Ясно, кроме того, что каноническое дополнение $F_0 \to \mathbf{Z}$ для F_*, которое отображает каждый симплекс размерности 0 в число 1, есть гомоморфизм G-модулей. Таким образом, если F_* *ацикличен*, то мы построим свободную резольвенту G-модуля $\mathbf{Z}$ и для любого правого (соответственно левого) модуля L будем иметь следующие формулы:

$$H_n(G; L) = H_n(F_* \underset{G}{\otimes} L),$$
$$H^n(G; L) = H^n(\mathrm{Hom}_G(F_*, L)).$$

Предыдущая конструкция применяется в многочисленных ситуациях. Возьмем *симплициальную схему* K и предположим, что G действует слева без неподвижных точек на K, преобразуя каждый симплекс из K в симплекс из K. Тогда в предыдущем построении можно взять в качестве F_* комплекс $C_*(K)$ целочисленных сингулярных цепей схемы K. Если $s \in G$ и $(x_0, \ldots, x_n)$ — сингулярный симплекс размерности n в K, то имеем

$$s \cdot (x_0, \ldots, x_n) = (sx_0, \ldots, sx_n).$$

Если симплициальная схема K ациклична, то мы видим, что $C_*(K)$ есть свободная резольвента модуля $\mathbf{Z}$. Пусть теперь L — левый G-модуль. Тогда $\mathrm{Hom}_G(C_*(K), L)$ можно интерпретировать следующим образом. Определим действие группы G на

$$\mathrm{Hom}(C_*(K), L) = C^*(K; L),$$

полагая

$$(s \cdot f)(u) = s \cdot (f(s^{-1} \cdot u))$$

для $s \in G$, $f \in C^*(K; L)$ и любого сингулярного симплекса u в K. Тогда ясно, что

$$\mathrm{Hom}_G(C_*(K), L) = C^*(K; L)^G.$$

Другими словами, *если K — ацикличная симплициальная схема, на которой G действует без неподвижных точек, то для любого G-модуля L имеют место канонические изоморфизмы*

$$H^n(G; L) = H^n(C^*(K; L)^G).$$

Очевидно, что аналогичным же образом можно получить формулы для гомологий

$$H_n(G;\ L) = H_n(C_*(K;\ L)_G).$$

Наиболее важным случаем является тот, когда в качестве K взята симплициальная схема G, в которой симплексами являются конечные и непустые подмножества в G, причем G действует на себе при помощи правых сдвигов. В этом случае мы получим, например, группы $H^n(G;\ L)$, вычисляя когомологии следующего коцепного комплекса $C^*(G;\ L)$. Его элементами степени n являются отображения $f: G^{n+1} \to L$, удовлетворяющие условию

$$f(sx_0,\ \ldots,\ sx_n) = s \cdot f(x_0,\ \ldots,\ x_n),$$

а дифференциал определяется формулой

$$df(x_0,\ \ldots,\ x_{n+1}) = \sum (-1)^i \cdot f(x_0,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_{n+1}).$$

Приведем еще один важный пример свободной резольвенты G-модуля $\mathbf{Z}$. Пусть G действует на *топологическом пространстве* X (разумеется, предполагается, что элементы $s \in G$ определяют гомеоморфизмы $X \to X$). Если $u: J_n \to X$ — некоторый n-мерный сингулярный симплекс пространства X и если $s \in G$, то обозначим через $s \cdot u$ сингулярный симплекс $s \circ u$. Ясно, что сингулярный комплекс $CS_*(X)$ образован G-модулями, которые свободны тогда и только тогда, когда G действует на X без неподвижных точек. Если L — некоторый G-модуль, то можно очевидным образом определить действие группы G на комплексах $CS_*(X;\ L)$ и $CS^*(X;\ L)$. Ясно, что

$$CS_*(X;\ L)_G = L \underset{G}{\otimes} CS_*(X)$$

для любого правого G-модуля и

$$CS^*(X;\ L)^G = \mathrm{Hom}_G(CS_*(X),\ L)$$

для любого левого G-модуля. Как и выше, отсюда следует, что *если G действует слева без неподвижных точек на топологическом пространстве X, ацикличном в сингулярных гомологиях, то имеют место изоморфизмы*

$$H_n(G;\ L) = H_n(CS_*(X;\ L)_G),$$

$$H^n(G;\ L) = H^n(CS^*(X;\ L)^G)$$

для любого правого (соответственно левого) G-модуля L. В продолжении этого труда мы покажем, что во многих случаях указанные выше группы можно интерпретировать с помощью фактор-пространства X/G.

Читатель, желающий углубить свои познания в этих вопросах, может обратиться к семинару А. Картана за 1950—1951 гг., первая половина которого посвящена когомологиям групп. Впрочем, мы также вернемся к этим проблемам в связи с теорией пучков.

ГЛАВА

II

ТЕОРИЯ ПУЧКОВ

§ 1. ПУЧКИ МНОЖЕСТВ

1.1. Аксиомы пучков.

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{F}$ — предпучок множеств с базой X (гл. I, п. 1.9). Говорят, что $\mathcal{F}$ есть *пучок* множеств, если выполнены следующие условия[1]):

(F1) *Пусть $(U_i)_{i \in I}$ — некоторое семейство открытых подмножеств в X, U — их объединение, а s' и s'' — два элемента из $\mathcal{F}(U)$. Если ограничения элементов s' и s'' на каждое U_i равны, то $s' = s''$.*

(F2) *Пусть $(U_i)_{i \in I}$ — некоторое семейство открытых подмножеств в X, U — их объединение, и пусть даны такие $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, что для любых $i, j \in I$ ограничения элементов s_i и s_j на $U_i \cap U_j$ равны. Тогда существует элемент $s \in \mathcal{F}(U)$, ограничение которого на U_i равно s_i при любом $i \in I$.*

Заметим, что в силу (F1) элемент $s \in \mathcal{F}(U)$, существование которого обеспечивается условием (F2), определяется *однозначно*. Кроме того, применяя (F2) к случаю, когда I — пустое множество, убеждаемся в том, что $\mathcal{F}(\phi)$ — одноэлементное множество (оставляя вообще в стороне тривиальный случай, когда все $\mathcal{F}(U)$ — пустые множества). Следовательно, в формулировке аксиомы (F2) достаточно рассматривать пары i, j, для которых $U_i \cap U_j$ не пусты.

Расслоенным пространством[2]) *с базой* X назовем всякую пару (E, p), где E — топологическое пространство и p — непрерывное отображение пространства E в X.

Сечением пространства (E, p) над произвольным подмножеством M из X называют всякое *непрерывное* отображение $s: M \to E$, такое, что $p(s(x)) = x$ для любого $x \in M$. Если сопоставить теперь каждому открытому множеству U из X множество $\mathcal{F}(U)$ сечений в (E, p)

[1]) Для любых открытых множеств U и $V \subset U$ образ произвольного элемента $s \in \mathcal{F}(U)$ при структурном отображении $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ называют *ограничением* элемента s на множество V. Объяснение этого термина будет дано в следующем пункте.

[2]) Автор использует здесь термин espace découpé. Мы остановились на термине «расслоенное пространство», хотя в русской литературе он обычно употребляется в гораздо более узком смысле. Заметим, что если (E, p) — расслоенное пространство с базой X, то множество $E(x) = p^{-1}(x)$, где $x \in X$, обычно называют *слоем* над точкой x. — *Прим. ред.*

над U и определить ограничение на V сечения над U как ограничение на V соответствующего отображения $U \to E$, то легко убедиться в том, что соответствие $U \to \mathcal{F}(U)$ определяет *пучок* множеств с базой X. Будем называть его *пучком ростков сечений* расслоенного пространства (E, p). Этот пример допускает много различных вариантов. Можно, например, ограничиться (там, где это имеет смысл) „дифференцируемыми" или „аналитическими" сечениями пространства (E, p).

1.2. Накрывающее пространство, связанное с пучком.

Пусть (E, p) — расслоенное пространство с базой X. Говорят, что (E, p) — *накрывающее пространство* над X, если отображение p является локальным гомеоморфизмом, т. е. если для каждой точки $u \in E$ найдется в E открытая окрестность, которую p *гомеоморфно* отображает на открытую окрестность точки $p(u) \in X$[1]. В этом случае для всякого сечения s в (E, p) над открытым в X множеством U множество $s(U)$ *открыто* в E. Более того, для любого $u \in E$ существует такое сечение s в (E, p), определенное в некоторой окрестности точки $x = p(u)$, что $s(x) = u$. Отсюда следует, что открытыми множествами в E являются как раз объединения множеств вида $s(U)$. Наконец, ясно, что если два сечения в (E, p), определенные в открытых окрестностях U и V точки x, равны в x, то они совпадают в некоторой *окрестности* $W \subset U \cap V$ точки x. Другими словами, множество

$$E(x) = p^{-1}(x)$$

можно отождествить с *индуктивным пределом* множеств $\mathcal{F}(U)$, где U пробегает направленное упорядоченное множество открытых в X окрестностей точки x.

Мы покажем теперь, что при помощи этой конструкции может быть получен *любой* пучок множеств с базой X.

В целях большей общности начнем с *предпучка* множеств $\mathcal{F}$ с базой X. Для любого $x \in X$ открытые окрестности точки x в X образуют направленное упорядоченное множество $\Phi(x)$. Условия транзитивности, наложенные на операторы ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, позволяют определить множество

$$\tilde{\mathcal{F}}(x) = \varinjlim_{U \in \Phi(x)} \mathcal{F}(U).$$

[1]) Автор применяет здесь термин espace étalé. Мы предпочли использовать известный термин «накрывающее пространство», понимая его в более широком, чем обычно, смысле. — *Прим. перев.*

Обозначим через $\tilde{\mathscr{F}}$ *объединение* всех множеств $\tilde{\mathscr{F}}(x)$ и через p — отображение множества $\tilde{\mathscr{F}}$ в X, которое переводит каждое подмножество $\tilde{\mathscr{F}}(x)$ в точку x.

Пусть U — открытое множество и $x \in U$. По самому определению индуктивного предела имеется каноническое отображение

$$\mathscr{F}(U) \to \tilde{\mathscr{F}}(x),$$

которое мы будем записывать $s \to \tilde{s}(x)$. Каждый $s \in \mathscr{F}(U)$ индуцирует поэтому отображение $\tilde{s}: U \to \tilde{\mathscr{F}}$, а именно отображение $x \to \tilde{s}(x)$, которое удовлетворяет условию $p(\tilde{s}(x)) = x$ для каждого $x \in U$. Далее, возьмем открытое $V \subset U$ и заменим s его ограничением t на V. Тогда для всякого $x \in V$ отображение $\mathscr{F}(U) \to \tilde{\mathscr{F}}(x)$ есть композиция отображений $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ и $\mathscr{F}(V) \to \tilde{\mathscr{F}}(x)$. Следовательно, *отображение* $\tilde{t}: V \to \tilde{\mathscr{F}}$ *есть ограничение на* V *отображения* $\tilde{s}: U \to \tilde{\mathscr{F}}$.

Снабдим теперь $\tilde{\mathscr{F}}$ *наименее тонкой из тех топологий, при которых отображения* $\tilde{s}$ *непрерывны* [$s \in \mathscr{F}(U)$, U — открытое в X множество]. Подмножество G из $\tilde{\mathscr{F}}$ открыто, следовательно, тогда и только тогда, когда для любого U и для любого $s \in \mathscr{F}(U)$ совокупность таких $x \in U$, что $\tilde{s}(x) \in G$, образует открытое в X множество.

Очевидно, что отображение p будет тогда непрерывным. С другой стороны, для всякого открытого множества U в X и всякого $s \in \mathscr{F}(U)$ множество $\tilde{s}(U)$ *открыто* в $\tilde{\mathscr{F}}$. Для этого достаточно проверить, что, каковы бы ни были $s \in \mathscr{F}(U)$ и $t \in \mathscr{F}(V)$, совокупность тех $x \in U \cap V$, для которых $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x)$, образует открытое множество. Но это непосредственно следует из определения индуктивного предела.

Из доказанного выше следует, очевидно, что пара $(\tilde{\mathscr{F}}, p)$ есть *накрывающее пространство над* X. Обозначим через $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ множество сечений пространства $\tilde{\mathscr{F}}$ над U. Тогда ясно, что канонические отображения

$$\mathscr{F}(U) \to \tilde{\mathscr{F}}(U)$$

определяют гомоморфизм предпучков. Мы покажем сейчас, что он является изоморфизмом тогда (и только тогда), когда $\mathscr{F}$ — *пучок*.

Указанные выше отображения взаимно однозначны, если $\mathscr{F}$ удовлетворяет аксиоме (F1) пучков. Действительно, предположим, что $s', s'' \in \mathscr{F}(U)$ определяют одно и то же сечение пространства $\tilde{\mathscr{F}}$ над U. Так как из равенства $\tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x)$ следует существование

окрестности точки x, на которой ограничения элементов s' и s'' равны, то U можно представить в виде объединения таких открытых множеств U_i, что ограничения элементов s' и s'' на каждое U_i равны, откуда следует наше утверждение.

Наш гомоморфизм отображает каждое $\mathscr{F}(U)$ на все $\tilde{\mathscr{F}}(U)$, если $\mathscr{F}$ удовлетворяет аксиомам (F1) и (F2). Действительно, рассмотрим некоторое сечение $f: U \to \tilde{\mathscr{F}}$. Так как два сечения, совпадающие в точке, совпадают и в некоторой ее окрестности, то можно представить U как объединение открытых U_i и найти такие $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, что $\tilde{s}_i = f$ на U_i. Так как $\tilde{s}_i = \tilde{s}_j$ на $U_i \cap U_j$ и так как выполнена (F1), то ограничения элементов s_i и s_j на $U_i \cap U_j$ равны. В силу (F2) существует тогда элемент $s \in \mathscr{F}(U)$, ограничение которого на каждое U_i есть s_i. Следовательно, $\tilde{s} = f$ в U, что и доказывает наше утверждение.

Будем говорить, что накрывающие пространства (E, p) и (E', p') *изоморфны*, если существует гомеоморфизм пространства E на E', который переводит p в p'. Ясно, что из предыдущих рассмотрений вытекает следующий результат.

Теорема 1.2.1. *Всякий пучок множеств с базой X изоморфен пучку ростков сечений некоторого накрывающего пространства над X, определенного однозначно с точностью до изоморфизма.*

Замечание 1.2.1. В дальнейшем мы не будем делать *никакого различия* между пучком множеств $\mathscr{F}$ и накрывающим пространством $(\tilde{\mathscr{F}}, p)$, которое мы связали с ним выше. Мы будем обозначать это накрывающее пространство той же буквой $\mathscr{F}$ (чаще всего опуская в обозначении „проекцию“ p) и для каждого подмножества M в X обозначать через $\mathscr{F}(M)$ множество сечений этого пространства над M. В частности, элементы множества $\mathscr{F}(U)$ будут отождествляться с сечениями пространства $\mathscr{F}$ над U. Если M состоит из одной точки, то, разумеется, мы вновь возвращаемся к множеству $\tilde{\mathscr{F}}(x)$, которое мы тоже будем обозначать просто через $\mathscr{F}(x)$. Эти отождествления, естественно, не будут мешать нам становиться то на точку зрения „накрывающих пространств“, то на точку зрения предпучков.

Замечание 1.2.2. Если $\mathscr{F}$ — пучок ростков сечений расслоенного пространства (E, p) с базой X, то элементы множества $\mathscr{F}(x)$ называют *ростками сечений* пространства (E, p) в точке x. Два сечения пространства (E, p) над окрестностями U и V точки x определяют один и тот же росток в том и только в том случае, когда они совпадают в некоторой *окрестности* $W \subset U \cap V$ точки x. Вообще говоря, накрывающее пространство, связанное с $\mathscr{F}$, отлично от (E, p), если, разумеется, (E, p) само не является накрывающим пространством.

Замечание 1.2.3. Как видно из доказательства теоремы 1.2.1, каждый *предпучок* множеств $\mathscr{F}$ определяет каноническим образом некоторое накрывающее пространство над X, т. е. *пучок* $\tilde{\mathscr{F}}$ множеств над X. Говорят, что этот пучок *порожден* предпучком $\mathscr{F}$. Заметим, что имеется канонический гомоморфизм $\mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ предпучков.

Замечание 1.2.4. Накрывающее пространство $\mathscr{F}$ над X *не является, вообще говоря, отделимым* (хаусдорфовым), даже если само X — отделимое пространство. Действительно, пусть s и t — сечения над открытым в X множеством U. Как мы уже видели, совокупность тех $x \in U$, для которых $s(x) = t(x)$, образует *открытое* в U множество. Если же $\mathscr{F}$ отделимо, то это множество и *замкнуто* в пространстве U. Другими словами, если $\mathscr{F}$ — отделимый пучок, то два сечения s и t над открытым U, равные в некоторой точке $x \in U$, равны во всей связной компоненте точки x в U, т. е. в пучке $\mathscr{F}$ выполняется „принцип аналитического продолжения". Например, если X — комплексное аналитическое многообразие, то пучок ростков голоморфных функций над X [для определения которого нужно принять за $\mathscr{F}(U)$ множество функций, определенных и голоморфных в U] является отделимым пучком, в то время как пучок ростков непрерывных функций таким не будет.

1.3. Сечения над произвольным множеством.

Пусть $\mathscr{F}$ — пучок с базой X. Так как сечения пучка $\mathscr{F}$ определены над произвольным подмножеством в X и так как имеются, очевидно, соответствующие операторы „ограничения", то можно поставить вопрос о справедливости аксиом (F1) и (F2) без предположения о том, что рассматриваемые в них множества открыты в X. Очевидно, что это имеет место для (F1), но не для (F2). В противном случае любое отображение $s: X \to \mathscr{F}$, для которого $p(s(x)) = x$, было бы непрерывным, так как X можно представить в виде объединения одноточечных множеств. Несмотря на это, имеет место следующий частный результат, который мы используем несколько ниже.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — пучок множеств с базой X и $(M_i)_{i \in I}$ — локально конечное замкнутое покрытие пространства X. Пусть даны такие сечения $s_i \in \mathscr{F}(M_i)$, что $s_i = s_j$ на $M_i \cap M_j$, каковы бы ни были i и j. Тогда существует сечение $s \in \mathscr{F}(X)$, совпадающее с s_i на M_i при любом $i \in I$.*

Очевидно, что существует и единственно отображение $s: X \to \mathscr{F}$, которое совпадает с s_i на M_i. Остается показать, что оно *непрерывно*. По условию всякая точка x обладает открытой окрестностью $U(x)$, которая пересекается лишь с конечным числом множеств M_i. Пусть

это будут множества $M_{i_1}, \ldots, M_{i_p}$. Так как они замкнуты, то можно предположить, выбирая $U(x)$ достаточно малой, что все они содержат x и что существует сечение t пучка $\mathcal{F}$ над $U(x)$, для которого имеем

$$t(x) = s(x) = s_{i_1}(x) = \ldots = s_{i_p}(x).$$

Рассматривая ограничение сечения t на M_{i_k}, приходим к тому, что существует окрестность $U_{i_k}(x)$ точки x, такая, что $t = s_{i_k}$ на $U_{i_k}(x) \cap M_{i_k}$. Очевидно, можно считать, что $U_{i_k}(x) = U(x)$ для любого k. Тогда s и t совпадают в

$$U(x) \cap (M_{i_1} \cup \ldots \cup M_{i_k}) = U(x),$$

а это доказывает, что s непрерывно в точке x.

1.4. Простые пучки.

Пусть X — некоторое топологическое пространство и A — произвольное множество. *Простым пучком с базой X и слоем A* называют пучок, порожденный предпучком $U \to A$, операторами ограничения которого являются тождественные отображения.

Легко конструируется соответствующее накрывающее пространство $\mathcal{F}$. Действительно, $\mathcal{F}(x)$ определяется как индуктивный предел, откуда, очевидно, $\mathcal{F}(x) = A$ для каждого x и $\mathcal{F} = X \times A$. Кроме того, ясно, что сечения, определяемые рассматриваемым предпучком, — это не что иное, как отображения $U \to X \times A$, имеющие вид $x \to (x, a)$, где a — *постоянный* элемент множества A. Другими словами, топология на $\mathcal{F} = X \times A$ есть произведение топологии пространства X и *дискретной* топологии в A.

Множество $\mathcal{F}(U)$ для каждого открытого U отождествляется каноническим образом с множеством непрерывных отображений $U \to A$ или, иначе говоря, с множеством *локально постоянных* отображений множества U в A.

В дальнейшем, не опасаясь недоразумений, мы будем чаще всего обозначать простой пучок с базой X и слоем A просто буквой A.

1.5. Индуцированные пучки.

Пусть X — топологическое пространство, Y — подпространство в X и $\mathcal{F}$ — пучок с базой X. Ясно, что множество точек накрывающего пространства $\mathcal{F}$, проектирующихся в Y, определяет накрывающее пространство над Y, т. е. пучок с базой Y, который мы будем обозначать через $\mathcal{F} \mid Y$ и называть *пучком над Y, индуцированным пучком $\mathcal{F}$*.

Ясно, что для всякого множества M в Y множество сечений пучка $\mathcal{F}|Y$ над M есть $\mathcal{F}(M)$. Это позволяет иначе определить пучок $\mathcal{F}|Y$, сопоставляя каждому открытому в Y множеству $U \subset Y$ множество $\mathcal{F}(U)$ сечений пучка $\mathcal{F}$ над U.

1.6. Гомоморфизмы пучков.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два пучка множеств с базой X. Под гомоморфизмом пучка $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ понимают гомоморфизм предпучка $\mathcal{A}$ в предпучок $\mathcal{B}$, т. е. систему отображений

$$f(U) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U),$$

удовлетворяющую очевидным условиям совместимости.

Будем рассматривать теперь $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ как накрывающие пространства над X. При переходе к индуктивному пределу гомоморфизм f определяет отображения

$$f(x) : \mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)$$

и тем самым отображение накрывающего пространства $\tilde{\mathcal{A}}$ в накрывающее пространство $\tilde{\mathcal{B}}$, которое мы обозначим через $\tilde{f}$. Если s — сечение пространства $\tilde{\mathcal{A}}$ над открытым множеством U, то элемент

$$f(U)(s) \in \mathcal{B}(U),$$

рассматриваемый как сечение пространства $\tilde{\mathcal{B}}$ над U, есть не что иное, как отображение $x \to \tilde{f}(s(x))$. Отсюда тотчас следует, что $\tilde{f}$ является *локальным гомеоморфизмом*, совместимым с проекциями.

Обратно, если дано *непрерывное* отображение $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$, совместимое с проекциями, то для каждого открытого U отображение $f(U) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U)$ преобразует сечение $s(x)$ в сечение $\tilde{f}(s(x))$. Таким образом, *существует взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами пучков $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и непрерывными отображениями $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$, совместимыми с проекциями.* Любое такое непрерывное отображение является локальным гомеоморфизмом и, следовательно, отображает $\tilde{\mathcal{A}}$ на *открытое* подпространство в $\tilde{\mathcal{B}}$.

Заметим, что вообще всякий гомоморфизм $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ предпучков определяет каноническим образом гомоморфизм пучка, порожденного предпучком $\mathcal{A}$, в пучок, порожденный предпучком $\mathcal{B}$.

Гомоморфизм пучков $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется *мономорфизмом* (соответственно *эпиморфизмом*), если соответствующее отображение $\tilde{f}$ взаимно однозначно (соответственно отображает $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$), т. е. если то же самое можно сказать относительно отображения $f(x)$: $\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)$ для любого $x \in X$. Если f — мономорфизм, то для каждого открытого множества $U \subset X$ отображение $f(U) : \mathcal{A}(U) \to$

$\to \mathscr{B}(U)$ взаимно однозначно, но если f — эпиморфизм, то отображения $f(U): \mathscr{A}(U) \to \mathscr{B}(U)$, вообще говоря, не являются отображениями на $\mathscr{B}(U)$.

Пусть, например, X — комплексное аналитическое многообразие. Рассмотрим пучки $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, определенные следующим образом. Для каждого открытого U множество $\mathscr{A}(U)$ есть множество голоморфных в U функций, а $\mathscr{B}(U)$ — множество функций, голоморфных и отличных от нуля на всем U. Определим гомоморфизм $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, сопоставляя всякой голоморфной на U функции $f(x)$ функцию $e^{f(x)}$. Так как любая голоморфная, не обращающаяся в нуль функция представима *локально* в виде $e^{f(x)}$, то этот гомоморфизм пучков является эпиморфизмом. Но хорошо известно, что если U не односвязно, то соответствие $f \to e^f$ отображает множество $\mathscr{A}(U)$ не на все $\mathscr{B}(U)$.

1.7. Пучки ростков гомоморфизмов.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — два пучка множеств с базой X. Обозначим через $\mathrm{Hom}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ множество гомоморфизмов пучка $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$.

Если Y — подпространство в X, то всякий гомоморфизм $f: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ определяет, очевидно, гомоморфизм $f \mid Y: \mathscr{A} \mid Y \to \mathscr{B} \mid Y$. В частности, для открытых в X множеств U и $V \subset U$ получаем каноническое отображение

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \mid U, \mathscr{B} \mid U) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A} \mid V, \mathscr{B} \mid V),$$

причем выполняются обычные условия совместимости. Поэтому можно рассматривать предпучок

$$U \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A} \mid U, \mathscr{B} \mid U).$$

Легко проверяется, что на самом деле это *пучок* множеств с базой X. Обозначим его через

$$\mathscr{H}om(\mathscr{A}, \mathscr{B})$$

и назовем *пучком ростков гомоморфизмов пучка $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$*. Для каждого *открытого* в X множества U по построению имеет место равенство

$$\mathscr{H}om(\mathscr{A}, \mathscr{B})(U) = \mathrm{Hom}(\mathscr{A} \mid U, \mathscr{B} \mid U).$$

Заметим, что для каждой точки x имеется каноническое отображение

$$\mathscr{H}om(\mathscr{A}, \mathscr{B})(x) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(x), \mathscr{B}(x)),$$

так как каждый росток гомоморфизма в точке x порождается гомоморфизмом над некоторой окрестностью точки x. Однако указанное отображение не является в общем случае *ни взаимно однозначным, ни отображением на все множество.*

1.8. Подпучки, образ гомоморфизма.

Определим подпучок пучка $\mathcal{A}$ с базой X, как такой пучок $\mathcal{B}$ с базой X, у которого $\mathcal{B}(U) \subset \mathcal{A}(U)$ для каждого открытого множества U, причем операторы ограничения в $\mathcal{B}$ индуцированы операторами ограничения в $\mathcal{A}$.

Система отображений вложения $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{A}(U)$ определяет в этом случае гомоморфизм пучков, который, очевидно, является *мономорфизмом*. Таким образом, накрывающее пространство $\mathcal{B}$ канонически отождествляется с *открытым* подпространством в $\mathcal{A}$.

Ясно, с другой стороны, что всякое открытое подпространство в $\mathcal{A}$ является накрывающим пространством над X и определяет некоторый подпучок в $\mathcal{A}$. (Заметим, что произвольное подпространство пространства $\mathcal{A}$ также определяет некоторый подпучок в $\mathcal{A}$, а именно пучок ростков сечений со значениями в этом подпространстве; но если заданное подпространство не является открытым в $\mathcal{A}$, то оно не совпадает с накрывающим пространством, связанным с определенным им подпучком.) В конечном счете понятия подпучка и открытого подпространства пучка совпадают.

Если $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ — *конечная* совокупность подпучков в $\mathcal{A}$, то можно определить их *пересечение* как пересечение соответствующих открытых подпространств в $\mathcal{A}$. Пучок

$$\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$$

можно определить и в случае, когда множество индексов I бесконечно, положив для каждого открытого множества U в X

$$\mathcal{B}(U) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i(U)$$

(выполнение аксиом пучков легко проверяется). Однако в этом случае уже нельзя представить $\mathcal{B}$ как пересечение открытых в $\mathcal{A}$ подпространств $\mathcal{B}_i$; он будет только *внутренностью* этого пересечения.

Пусть теперь дан гомоморфизм пучков

$$f : \mathcal{B} \to \mathcal{A}.$$

Тогда с точки зрения накрывающих пространств $f(\mathcal{B})$ есть открытое подпространство, а следовательно, и подпучок пучка $\mathcal{A}$. Пучок $f(\mathcal{B})$ называют *образом пучка* $\mathcal{B}$ *при* f. Очевидно, что f индуцирует *эпиморфизм* пучка $\mathcal{B}$ на пучок $f(\mathcal{B})$. Легко убедиться в том, что $f(\mathcal{B})$ можно определить и как пучок, *порожденный предпучком*

$$U \to \operatorname{Im}\left[\mathcal{B}(U) \xrightarrow{f(U)} \mathcal{A}(U)\right].$$

1.9. Фактор-пучки.

Пусть $\mathscr{F}$ — пучок множеств с базой X. Предположим, что для каждого открытого множества $U \subset X$ задано отношение эквивалентности $R(U)$ в множестве $\mathscr{F}(U)$. Говорят, что система этих отношений $R(U)$ есть отношение эквивалентности в $\mathscr{F}$, если она удовлетворяет следующему условию: для того чтобы s, $t \in \mathscr{F}(U)$ были эквивалентны относительно $R(U)$, необходимо и достаточно, чтобы U можно было представить в виде объединения таких открытых множеств U_i, что для каждого i ограничения элементов s и t на U_i были эквивалентны относительно $R(U_i)$.

При выполнении этого условия можно ввести на семействе фактор-множеств $\mathscr{F}(U)/R(U)$ структуру *предпучка*, определяя естественным образом отображения $\mathscr{F}(U)/R(U) \to \mathscr{F}(V)/R(V)$ для $U \supset V$. Определенный таким образом предпучок удовлетворяет аксиоме (F1) пучков, но, вообще говоря, не удовлетворяет (F2). Обозначим через $\mathscr{F}/R$ пучок, порожденный этим предпучком [так что $\mathscr{F}(U)/R(U)$ взаимно однозначно вкладывается в $(\mathscr{F}/R)(U)$]. Система канонических отображений $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)/R(U)$ позволяет естественным образом определить гомоморфизм пучков $\mathscr{F} \to \mathscr{F}/R$, который является *эпиморфизмом*.

Рассмотрим, например, гомоморфизм пучков $f: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ и возьмем в $\mathscr{A}(U)$ в качестве $R(U)$ отношение эквивалентности, которое определяется равенством $f(U)s = f(U)t$. Тогда указанные выше условия выполнены, и фактор-пучок $\mathscr{A}/R$ каноническим образом отождествляется с $f(\mathscr{A})$.

1.10. Прямое произведение пучков.

Пусть $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ — семейство пучков над пространством X. Рассмотрим предпучок

$$U \to \prod_{i \in I} \mathscr{F}_i(U),$$

отображения ограничения которого определены для $U \supset V$ как произведения отображений ограничения $\mathscr{F}_i(U) \to \mathscr{F}_i(V)$. Этот предпучок является фактически *пучком* множеств. Действительно, пусть (U_λ) — семейство открытых множеств, объединение которых равно U, и пусть даны такие элементы

$$s_\lambda = (s_{i\lambda})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{F}_i(U_\lambda),$$

что $s_\lambda = s_\mu$ на $U_\lambda \cap U_\mu$. Тогда для каждого i существует одно и только одно сечение $s_i \in \mathscr{F}_i(U)$, которое совпадает с $s_{i\lambda}$ на U_λ.

Ясно, что $s=(s_i)_{i\in I}$ — единственный элемент множества $\Pi\mathscr{F}_i(U)$, который на каждом U_λ индуцирует s_λ, что и требовалось доказать.

Так определенный пучок обозначается через

$$\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$$

и называется *прямым произведением пучков* $\mathscr{F}_i$. Пусть $\mathscr{F}$ — этот пучок. Для каждого i каноническим образом определяется гомоморфизм пучков

$$pr_i:\mathscr{F}\to\mathscr{F}_i$$

и тем самым каноническое отображение

$$\mathscr{F}(x)\to\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i(x)$$

для любой точки x. Последнее отображение, очевидно, *взаимно однозначно*, но, вообще говоря, не является отображением на все множество: если для каждого i задан некоторый росток сечения пучка $\mathscr{F}_i$ в точке x, то, вообще говоря, нельзя продолжить эти ростки *одновременно* на некоторую окрестность точки x в X, если, разумеется, I не конечно.

Заметим, что понятие прямого произведения обладает свойством „универсальности“, т. е. если заданы гомоморфизмы

$$f_i:\mathscr{A}\to\mathscr{F}_i,$$

то существует, и притом только один, гомоморфизм

$$f:\mathscr{A}\to\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i,$$

такой, что

$$f_i=pr_i\circ f$$

для каждого $i\in I$.

1.11. Индуктивные пределы пучков.

Пусть $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство пучков над пространством X. Предположим, во-первых, что множество индексов Λ является направленным, во-вторых, что для каждой пары $\lambda\geqslant\mu$ из Λ задан гомоморфизм пучков

$$f_\mu^\lambda:\mathscr{F}_\lambda\to\mathscr{F}_\mu,$$

такой, что выполнены следующие условия транзитивности:

$$f_\lambda^\lambda=1;\quad f_\nu^\lambda=f_\nu^\mu\circ f_\mu^\lambda,\quad \text{если}\quad \lambda\geqslant\mu\geqslant\nu.$$

Тогда можно следующим образом определить пучок

$$\mathscr{F}=\varinjlim_\lambda \operatorname{ind}\mathscr{F}_\lambda.$$

Для каждого открытого U гомоморфизмы $f^\lambda_\mu(U)$ позволяют построить множество $\lim\limits_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(U)$. Так как для $U\supset V$ диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_\lambda(U) & \xrightarrow{f^\lambda_\mu(U)} & \mathcal{F}_\mu(U)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathcal{F}_\lambda(V) & \xrightarrow{f^\lambda_\mu(V)} & \mathcal{F}_\mu(V)
\end{array}$$

коммутативны, то для $U\supset V$ имеется каноническое отображение

$$\lim_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(U)\to\lim_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(V).$$

Поэтому можно рассмотреть *предпучок*

$$U\to\lim_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(U).$$

По определению $\mathcal{F}$ есть пучок, порожденный построенным предпучком.

При помощи композиции естественных отображений

$$\mathcal{F}_\lambda(U)\to\lim_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(U)$$

и

$$\lim_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(U)\to\mathcal{F}(U)$$

мы можем определить гомоморфизмы пучков

$$f^\lambda:\mathcal{F}_\lambda\to\mathcal{F}$$

со следующим условием совместимости:

$$f^\lambda=f^\mu\circ f^\lambda_\mu\quad\text{для}\quad\lambda\geqslant\mu.$$

Здесь также имеет место свойство „универсальности“. Пусть даны такие гомоморфизмы

$$h^\lambda:\mathcal{F}_\lambda\to\mathcal{A},$$

что выполнено равенство

$$h^\lambda=h^\mu\circ f^\lambda_\mu\quad\text{для}\quad\lambda\geqslant\mu;$$

тогда существует, и притом только один, гомоморфизм

$$h:\lim_{\lambda}\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda\to\mathcal{A},$$

для которого имеют место равенства

$$h^\lambda=h\circ f^\lambda\ \text{для любого}\ \lambda.$$

Заметим, что множество $\mathcal{F}(x)$ (слой над точкой) можно определить следующим образом. Прежде всего, отображения

$$f^\lambda(x): \mathcal{F}_\lambda(x) \to \mathcal{F}(x)$$

удовлетворяют естественным условиям транзитивности и, следовательно, определяют каноническое отображение

$$\varinjlim_\lambda \mathcal{F}_\lambda(x) \to \mathcal{F}(x).$$

Это отображение является *взаимно однозначным отображением на* $\mathcal{F}(x)$. Действительно, в силу самой конструкции слоя в пучке, связанном с предпучком, имеем

$$\mathcal{F}(x) = \operatorname*{lim\,ind}_{U \ni x}\left(\operatorname*{lim\,ind}_{\lambda} \mathcal{F}_\lambda(U)\right) = \operatorname*{lim\,ind}_{\lambda}\left(\operatorname*{lim\,ind}_{U \ni x} \mathcal{F}_\lambda(U)\right) = \operatorname*{lim\,ind}_{\lambda} \mathcal{F}_\lambda(x),$$

что и утверждалось. Читатель без труда проверит, что $\mathcal{F}$ как топологическое пространство есть индуктивный предел топологических пространств $\mathcal{F}_\lambda$, т. е. подмножество в $\mathcal{F}$ открыто тогда и только тогда, когда все его полные прообразы при отображениях $f^\lambda: \mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}$ открыты в $\mathcal{F}_\lambda$.

Заметим также, что для каждого подпространства Y из X имеет место канонический изоморфизм

$$\mathcal{F} \mid Y = \operatorname*{lim\,ind}_{\lambda} (\mathcal{F}_\lambda \mid Y).$$

Доказательство этого факта удобнее всего проводить с точки зрения накрывающих пространств.

1.12. Обратный образ пучка при непрерывном отображении.

Пусть X и Y — два топологических пространства, f — непрерывное отображение пространства X в Y, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — пучки множеств с базами X и Y соответственно. Мы будем называть *гомоморфизмом пучка* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{B}$, *совместимым с* f, такое *непрерывное* отображение $\bar{f}$ накрывающего пространства $\mathcal{A}$ в накрывающее пространство $\mathcal{B}$, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Будем говорить также, что $\bar{f}$ есть *f-гомоморфизм* пучка $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

Покажем теперь, что если даны X, Y, f и $\mathcal{B}$, то существует пучок $f^*(\mathcal{B})$ над X и f-гомоморфизм $\bar{f}: f^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$, такие, что всякий

f-гомоморфизм $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ разлагается в композицию гомоморфизма $\bar{f}$ и однозначно определенного гомоморфизма $\mathcal{A} \to f^*(\mathcal{B})$.

Прежде всего отметим, что если $f' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ есть f-гомоморфизм, то для любого сечения $s \in \mathcal{A}(U)$ отображение

$$s' : x \to f'(s(x))$$

множества U в накрывающее пространство $\mathcal{B}$ является *непрерывным*, причем

$$s'(x) \in \mathcal{B}(f(x)) \text{ для любого } x \in U. \qquad (*)$$

Обозначим теперь через $f^*(\mathcal{B})(U)$ множество непрерывных отображений $s' : U \to \mathcal{B}$, удовлетворяющих предыдущему условию. Определив естественным образом операторы ограничения

$$f^*(\mathcal{B})(U) \to f^*(\mathcal{B})(V)$$

для $V \subset U$, мы легко убедимся в том, что отображение $U \to f^*(\mathcal{B})(U)$ задает *пучок множеств* $f^*(\mathcal{B})$ над X. Пусть s' и s'' — два сечения пучка $f^*(\mathcal{B})$ в окрестности точки x. Для того чтобы ростки $\tilde{s}'(x)$ и $\tilde{s}''(x) \in f^*(\mathcal{B})(x)$ в точке x совпадали, необходимо и достаточно, чтобы ограничения функций s' и s'' на некоторую окрестность U точки x были тождественны. Следовательно, должно выполняться равенство

$$s'(x) = s''(x).$$

Обратно, предположим, что последнее условие выполнено. Обозначим через t некоторое сечение пучка $\mathcal{B}$ над окрестностью V точки $f(x)$, равное $s'(x) = s''(x)$ в точке x. Так как f непрерывно, то можно предполагать, что s' и s'' определены в некоторой окрестности U точки x, причем такой, что $f(U) \subset V$. С другой стороны, так как отображения s' и s'': $U \to \mathcal{B}$ непрерывны и так как множество $t(V) \subset \mathcal{B}$ открыто, если открыто V, то совокупность таких $y \in U$, что $s'(y) \in t(V)$ [соответственно $s''(y) \in t(V)$] образует окрестность U' (соответственно U'') точки x. Принимая во внимание условие $(*)$, получаем, что $s'(y) = s''(y)$ в $U' \cap U''$. Следовательно, $\tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x)$.

Из изложенного выше следует, что существует, и притом только одно, отображение $\bar{f} : f^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$, такое, что для любого сечения s пучка $f^*(\mathcal{B})$ над некоторой окрестностью точки x выполняется равенство

$$\bar{f}(\tilde{s}(x)) = s(x).$$

Кроме того, предыдущие рассуждения показывают, что $\bar{f}$ непрерывно. Так как $\bar{f}$, очевидно, совместимо с f, то $\bar{f}$ является f-гомоморфизмом пучка $f^*(\mathcal{B})$ в $\mathcal{B}$.

Непосредственно проверяется, что для каждой точки $x \in X$ отображение $\bar{f}$ индуцирует взаимно однозначное отображение множе-

ства $f^*(\mathscr{B})(x)$ на $\mathscr{B}(f(x))$. Действительно, из предыдущих рассуждений ясно, что $\bar{f}$ взаимно однозначно, и, следовательно, остается показать, что, каковы бы ни были $x \in X$ и $b \in \mathscr{B}(f(x))$, существует такое сечение s пучка $f^*(\mathscr{B})$ над окрестностью U точки x, что $s(x) = b$. Построим для этого сечение t пучка $\mathscr{B}$ над окрестностью V точки $f(x)$, равное b в точке $f(x)$. Положим $U = f^{-1}(V)$ и определим s равенством $s = t \circ f$.

Эта конструкция, кроме того, показывает, что для любого открытого множества V из Y существует каноническое отображение множества $\mathscr{B}(V)$ в $f^*(\mathscr{B})(f^{-1}(V))$, совместимое с операторами ограничения. Это отображение взаимно однозначно, но отображением на все множество является, вообще говоря, только „локально“ (в этом легко убедиться на примере, взяв X несвязным, а Y состоящим из одной точки).

Рассмотрим, наконец, произвольный f-гомоморфизм $f' : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Сопоставим каждому сечению $s \in \mathscr{A}(U)$ отображение $s' : x \to f'(s(x))$ открытого множества U в $\mathscr{B}$. Мы получим тем самым сечение $s' \in f^*(\mathscr{B})(U)$. Это непосредственно определяет гомоморфизм $\mathscr{A} \to f^*(\mathscr{B})$, который в композиции с $\bar{f} : f^*(\mathscr{B}) \to \mathscr{B}$ дает f'.

Пучок $f^*(\mathscr{B})$ называется *обратным образом пучка $\mathscr{B}$ относительно f*.

В качестве примера отметим следующий результат. Пусть X — пространство, Y — подпространство в X и $\mathscr{A}$ — пучок с базой X. Тогда индуцированный пучок $\mathscr{A}|Y$ канонически изоморфен обратному образу пучка $\mathscr{A}$ при каноническом вложении $Y \to X$.

1.13. Прямой образ пучка.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и $\mathscr{A}$ — пучок с базой X. Определим следующим образом пучок $\mathscr{B} = f(\mathscr{A})$ с базой Y. Для всякого открытого $V \subset Y$ положим

$$\mathscr{B}(V) = \mathscr{A}(f^{-1}(V)),$$

а для $V' \subset V''$ определим отображение ограничения $\mathscr{B}(V'') \to \mathscr{B}(V')$ как отображение ограничения $\mathscr{A}(f^{-1}(V'')) \to \mathscr{A}(f^{-1}(V'))$. Совершенно очевидно, что все аксиомы пучков выполнены.

Будем говорить, что $f(\mathscr{A})$ есть *прямой образ пучка $\mathscr{A}$ относительно f*. Отображение $\mathscr{A} \to f(\mathscr{A})$ является, очевидно, *ковариантным функтором*, определенным на категории пучков с базой X, со значениями в категории пучков с базой Y.

Мы предлагаем читателю в качестве упражнения изучить соотношения между операцией взятия прямого образа и операцией взятия обратного образа.

§ 2. ПУЧКИ МОДУЛЕЙ

2.1. Пучки колец.

В § 1 гл. I было дано общее определение предпучка со значениями в произвольной *категории*. Если категория такова, что ее объекты являются *множествами*, а гомоморфизмы одних объектов в другие совпадают с *отображениями*, то можно, очевидно, говорить о *пучках* со значениями в этой категории.

Например, пучок групп над пространством X (соответственно пучок абелевых групп, колец, коммутативных колец с единицей и т. д.) есть предпучок с базой X и значениями в категории групп (соответственно абелевых групп и т. д.), который как предпучок множеств удовлетворяет аксиомам пучков.

Пусть $\mathcal{A}$ — пучок колец над X. Тогда для всякого открытого U множества $\mathcal{A}(U)$ являются кольцами и для $U \supset V$ отображения ограничения $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ являются гомоморфизмами колец. Отсюда следует, что слой над точкой

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{U \ni x} \operatorname{ind} \mathcal{A}(U)$$

будет в пределе каноническим образом снабжен структурой кольца. Таким образом, переходя на точку зрения накрывающих пространств, мы имеем в $\mathcal{A}$ два закона композиции: $(u, v) \to u + v$ и $(u, v) \to uv$, которые определены для элементов, удовлетворяющих условию $p(u) = p(v)$, индуцируют на каждом слое $\mathcal{A}(x)$ структуру кольца и, кроме того, *непрерывны*. Если s и t — два сечения пучка $\mathcal{A}$ над открытым множеством U, то ясно, что $s + t$ и st — это *сечения*

$$x \to s(x) + t(x) \quad \text{и} \quad x \to s(x)\, t(x).$$

Пример 2.1.1. Пусть Λ — фиксированное кольцо. Простой пучок с базой X и слоем Λ является, очевидно, пучком колец. Этот пучок мы обычно будем отождествлять с самим кольцом Λ.

Пример 2.1.2. Если X — топологическое пространство (соответственно дифференцируемое или комплексное аналитическое многообразие), то пучок ростков непрерывных (соответственно дифференцируемых или голоморфных) функций на X очевидным образом является пучком колец.

Пример 2.1.3. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Идеал $\mathfrak{p} \neq A$ называется *простым*, если кольцо $A/\mathfrak{p}$ есть область целостности. Напомним, что если $\mathfrak{a}$ — идеал, отличный от A, то пересечение простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, состоит из тех $x \in A$, для которых $x^n \in \mathfrak{a}$ при некотором целом n.

Пусть $X = \Omega(A)$ — множество всех простых идеалов кольца A („простой спектр" кольца A). Введем на X топологию („топологию Зариского"), принимая за *замкнутые* множества те подмножества из X, которые имеют вид $F(\mathfrak{a})$, где $F(\mathfrak{a})$ — совокупность всех простых идеалов, содержащих заданный идеал $\mathfrak{a}$. Выполнимость аксиом топологических пространств тривиально следует из формул

$$\bigcap F(\mathfrak{a}_i) = F\left(\sum \mathfrak{a}_i\right), \quad F(\mathfrak{a}) \cup F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

Для простоты предположим, что A — *область целостности*. В этом случае *пересечение любых двух непустых открытых множеств не пусто*. Действительно, если $F(\mathfrak{a}) \cup F(\mathfrak{b}) = X$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ содержится во всяком простом идеале из A и, следовательно, равен нулю, а тогда по крайней мере один из идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ равен нулю.

Определим теперь *пучок колец* над X следующим образом. Пусть K — поле отношений кольца A и $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. Обозначим через $A_\mathfrak{p}$ множество элементов поля K, представимых в виде x/y, где $x, y \in A$ и $y \notin \mathfrak{p}$. Кольцо $A_\mathfrak{p}$ обладает единственным максимальным идеалом $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$. Для всякого непустого открытого в X множества U положим

$$\mathcal{A}(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$$

и определим для $U \supset V$ отображение ограничения $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ как тождественное отображение, что имеет смысл, поскольку, очевидно, $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{A}(V)$. Положим $\mathcal{A}(\phi) = 0$. Для того чтобы проверить аксиомы пучков, рассмотрим семейство $(U_i)_{i \in I}$ непустых открытых множеств, объединение которых равно U, и такие $s_i \in \mathcal{A}(U_i)$, что для любых i и j ограничения элементов s_i и s_j на $U_i \cap U_j$ совпадают. Так как $U_i \cap U_j$ не пусто, то элемент s_i из K не зависит от i. Таким образом, существует, и притом единственный, элемент

$$s \in \mathcal{A}(U) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}(U_i),$$

который „индуцирует" s_i на каждом U_i. Тем самым доказано, что кольца $\mathcal{A}(U)$ образуют над X пучок колец.

Указанный выше пучок можно реализовать, кроме того, как пучок ростков функций на X. Пусть f — элемент из K. Будем говорить, что *f определен в точке* $\mathfrak{p} \in X$, если $f \in A_\mathfrak{p}$. Легко проверяется, что множество $D(f)$ точек, в которых f определен, *открыто* в X (для доказательства достаточно рассмотреть в A идеал, состоя-

щий из тех q, для которых $qf \in A$). Если f определен в $\mathfrak{p}$, то *значением элемента* f *в точке* $\mathfrak{p}$ назовем образ элемента f в поле

$$K(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}},$$

которое отождествляется с полем отношений области целостности $A/\mathfrak{p}$. Таким образом, мы поставили в соответствие каждому $f \in K$ функцию, определенную на открытом множестве $D(f)$ и принимающую значения в полях $K(\mathfrak{p})$ (зависящих от точки $\mathfrak{p}$). Ясно, что $\mathcal{A}(U)$ представляет собой не что иное, как кольцо элементов $f \in K$, которые определены в каждой точке U.

Заметим, что совокупность тех элементов $f \in K$, которые определены на всем X, совпадает с A. Другими словами, A является пересечением всех локальных колец $A_{\mathfrak{p}}$ (можно даже ограничиться только *максимальными* идеалами $\mathfrak{p}$), в чем легко убедиться непосредственно. Более того, так как пересечение всех простых идеалов кольца A равно нулю, то мы видим, что соответствие между элементами $f \in K$ и функциями $\mathfrak{p} \to f(\mathfrak{p})$ на X *взаимно однозначно*.

Наконец, заметим, что легко найти кольцо $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$, вычислив индуктивный предел колец $\mathcal{A}(U)$, когда U пробегает направленное множество открытых окрестностей точки $\mathfrak{p}$. Этот предел, очевидно, равен подкольцу поля K, полученному объединением всех $\mathcal{A}(U)$, где $U \ni \mathfrak{p}$. Но указанное объединение совпадает с локальным кольцом $A_{\mathfrak{p}}$. Прежде всего, $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$, очевидно, содержится в $A_{\mathfrak{p}}$. С другой стороны, всякий $f \in A_{\mathfrak{p}}$ принадлежит некоторому $\mathcal{A}(U)$ — для этого достаточно положить $U = D(f)$. На этом основании мы будем называть $\mathcal{A}$ *пучком локальных колец над* X.

Пример 2.1.4. (Алгебраические многообразия.) Конструкция, рассмотренная выше, с несущественными изменениями приводит к определению пучка локальных колец над произвольным *алгебраическим многообразием*. Напомним сначала, следуя Шевалле [1]), определение алгебраического многообразия.

Прежде всего нам понадобятся следующие определения. Коммутативное кольцо с единицей A называют *локальным кольцом*, если A обладает единственным максимальным идеалом, который мы будем обозначать через $\mathfrak{r}(A)$. Пусть A и $B \supset A$—локальные кольца. Говорят, что B *доминирует* над A, если $\mathfrak{r}(A) = A \cap \mathfrak{r}(B)$. Наконец, два локальных кольца, содержащиеся в одном и том же поле K, называются *родственными*, если в K существует такое локальное кольцо, которое доминирует и над A, и над B. Это означает, что в подкольце C поля K, порожденном A и B, идеал, порожденный $\mathfrak{r}(A)$ и $\mathfrak{r}(B)$, отличен от C.

Рассмотрим теперь поле k, которое будем считать для простоты алгебраически замкнутым, и пусть K — расширение конечного типа

[1]) Chevalley C., Sur la notion de variété algébrique, *Nagoya Math. J.*, 6 (1955), 1.
Cartan H.—Chevalley C., Séminaire E. N. S., 1955—1956.

поля k, т. е. $K=k(x_1, \ldots, x_n)$. Подкольцо A из K, содержащее k, будем называть *аффинной алгеброй*, если существуют такие $y_1, \ldots, y_s \in A$, что A как подкольцо порождается полем k и элементами y_i, и если, кроме того, K есть поле отношений кольца A.

Назовем *местом* расширения K/k любое локальное кольцо вида $A_{\mathfrak{m}}$, где A — аффинная алгебра, а $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A. Напомним („теорема о нулях"), что $\mathfrak{m}$ обязательно является ядром некоторого гомоморфизма кольца A на k.

Алгебраическим многообразием над k, имеющим K в качестве поля функций, называют множество X, снабженное структурой, которая определяется заданием для каждого $x \in X$ некоторого *места* $\mathrm{O}(x)$ поля K при выполнении следующих аксиом:

(VA1) *Места $\mathrm{O}(x)$ и $\mathrm{O}(y)$ родственны только в том случае, когда $x=y$.*

(VA2) *В K существует такой конечный набор аффинных алгебр A_i, что множество мест $\mathrm{O}(x)(x \in X)$ совпадает с множеством мест поля K, определенных максимальными идеалами колец A_i.*

Для произвольного $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{m}(x)$ единственный максимальный идеал в $\mathrm{O}(x)$. Тогда можно канонически отождествить k с полем $\mathrm{O}(x)/\mathfrak{m}(x)$. Говорят, что *$f \in K$ определен в точке x*, если $f \in \mathrm{O}(x)$. В этом случае существует такой $f(x) \in k$, что

$$f \equiv f(x) \mod \mathfrak{m}(x).$$

Элемент $f(x)$ называют *значением элемента f в точке x*. Наконец, обозначим через $D(f)$ множество всех тех $x \in X$, в которых определен элемент f. Таким образом, всякий $f \in K$ индуцирует отображение $D(f) \to k$, которое, как легко видеть, взаимно однозначно определено элементом f. Точнее, если $f, g \in K$ и $f(x)=g(x)$ для любого $x \in D(f) \cap D(g)$, то $f=g$. Функции, определенные нашим способом на некоторых подмножествах многообразия X, называются *рациональными функциями* на X.

Кроме того, X можно снабдить *топологией*, выбрав в качестве открытых в X множеств те, которые представляют собой объединение множеств вида

$$D(f_1) \cap \ldots \cap D(f_n).$$

Легко убедиться в том, что *всякая убывающая последовательность замкнутых множеств стационарна* и, кроме того, что *два непустых открытых множества всегда пересекаются по непустому множеству* [1]).

[1]) Это свойство алгебраических многообразий называется *неприводимостью*. Вообще, топологическое пространство называется *неприводимым*, если любые два его непустых открытых множества имеют непустое пересечение или, что эквивалентно, если его нельзя представить в виде объединения двух собственных замкнутых подмножеств. — *Прим. ред.*

Над пространством X можно определить ***пучок колец*** $\mathcal{O}$ следующим образом. Для каждого открытого в X множества U примем за $\mathcal{O}(U)$ множество тех $f \in K$, для которых $D(f) \supset U$, т. е. положим

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} \mathrm{O}(x),$$

а за гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ (для $U \supset V$) примем вложение кольца $\mathcal{O}(U)$ в $\mathcal{O}(V) \supset \mathcal{O}(U)$. Не представляет никаких затруднений проверить, что аксиомы пучков выполнены и что слой над точкой x пучка $\mathcal{O}$ совпадает с локальным кольцом $\mathrm{O}(x)$.

Очевидно, что если определенный на открытом множестве U элемент $f \in K$ принимает в каждой точке множества U значение, равное 0, то $f = 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{O}(U)$ можно отождествить с множеством отображений $U \to \boldsymbol{k}$, которые индуцированы рациональными функциями на X, определенными по крайней мере на U. Таким образом, можно рассматривать $\mathcal{O}$ как некоторый подпучок пучка ростков отображений пространства X в $\boldsymbol{k}$.

2.2. Модули над пучком колец.

Пусть $\mathcal{A}$ — пучок колец над топологическим пространством X. *Левым $\mathcal{A}$-модулем* будем называть всякий пучок множеств $\mathcal{L}$ над X со следующей структурой: для каждого открытого множества U на множестве $\mathcal{L}(U)$ задана структура левого модуля над кольцом $\mathcal{A}(U)$, причем для $V \subset U$ отображение ограничения $\mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}(V)$ является гомоморфизмом модулей, совместимым с гомоморфизмом колец $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$.

Очевидно, тот же результат получится, если рассмотреть на X произведения пучков $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ и $\mathcal{A} \times \mathcal{L}$ (п. 1.10) и задать такие гомоморфизмы $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ и $\mathcal{A} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ пучков множеств, что при любом $x \in X$ получающиеся из них отображения $\mathcal{L}(x) \times \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x)$ и $\mathcal{A}(x) \times \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x)$ определяют на $\mathcal{L}(x)$ структуру левого модуля над кольцом $\mathcal{A}(x)$.

Если $\mathcal{A}$ — простой пучок с базой X, слоем которого является кольцо A, то левые $\mathcal{A}$-модули над X — это не что иное, как пучки над X со значениями в категории левых A-модулей.

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — два левых $\mathcal{A}$-модуля. *Гомоморфизмом* $f: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ будем называть такой гомоморфизм пучков множеств, что для каждого открытого множества U отображение $f(U): \mathcal{L}(U) \to \mathcal{M}(U)$ является гомоморфизмом левых $\mathcal{A}(U)$-модулей. Мы получим, впрочем, то же самое, требуя, чтобы для каждой точки $x \in X$ отображение $f(x): \mathcal{L}(x) \to \mathcal{M}(x)$ являлось гомоморфизмом левых $\mathcal{A}(x)$-модулей. Определяя естественным образом сумму двух гомо-

морфизмов пучка $\mathscr{L}$ в $\mathscr{M}$, получаем на множестве

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$$

гомоморфизмов пучка $\mathscr{L}$ в $\mathscr{M}$ структуру *абелевой группы*. Тем самым совокупность всех левых $\mathscr{A}$-модулей можно рассматривать как *аддитивную категорию*. Мы увидим, что она является в действительности абелевой категорией.

С другой стороны, для двух левых $\mathscr{A}$-модулей $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ можно определить *пучок*

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$$

ростков гомоморфизмов пучка $\mathscr{L}$ в $\mathscr{M}$, рассмотрев (см. п. 1.7) отображения

$$U \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\mid U}(\mathscr{L}\mid U, \mathscr{M}\mid U).$$

Мы получим при этом пучок абелевых групп, сечения которого над всем X совпадают с гомоморфизмами пучка $\mathscr{L}$ в $\mathscr{M}$. Если пучок колец $\mathscr{A}$ *коммутативен*, то легко видеть, что в пучок $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$ вводится естественным образом структура $\mathscr{A}$-модуля. Это можно сделать и в более общем случае, когда $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ — левые $\mathscr{A}$-модули, а $\mathscr{L}$ снабжен, кроме того, структурой правого $\mathscr{A}$-модуля, „перестановочной" с его структурой левого $\mathscr{A}$-модуля.

Например, если $\mathscr{A}$ — пучок колец с единицей, то для всякого левого $\mathscr{A}$-модуля $\mathscr{L}$ имеет место канонический изоморфизм левых $\mathscr{A}$-модулей

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}, \mathscr{L}) = \mathscr{L}.$$

Для установления этого изоморфизма заметим, что гомоморфизмы $\mathscr{A}\mid U \to \mathscr{L}\mid U$ взаимно однозначно соответствуют элементам модуля $\mathscr{L}(U)$ — достаточно сопоставить такому гомоморфизму f сечение пучка $\mathscr{L}$, которое является образом единичного сечения пучка $\mathscr{A}$ над U при гомоморфизме f.

Пример 2.2.1. Пусть X — дифференцируемое многообразие и E—многообразие, являющееся расслоенным пространством с базой X, слой которого есть вещественное векторное пространство конечной размерности. Тогда пучок ростков дифференцируемых сечений расслоения E можно рассматривать как модуль над пучком ростков дифференцируемых функций на X.

2.3. Подмодули и фактор-модули.

Пусть $\mathscr{A}$ — пучок колец с базой X и $\mathscr{L}$ — левый $\mathscr{A}$-модуль. *Подмодулем* в $\mathscr{L}$ назовем всякий подпучок $\mathscr{L}'$ в $\mathscr{L}$, в котором для каждого x множество $\mathscr{L}'(x) \subset \mathscr{L}(x)$ является $\mathscr{A}(x)$-подмодулем в $\mathscr{L}(x)$. Очевидно, что для каждого открытого множества U

множество $\mathscr{S}'(U)$ является $\mathscr{A}(U)$-подмодулем в $\mathscr{S}(U)$. Следовательно, $\mathscr{S}'$ можно естественным образом снабдить структурой левого $\mathscr{A}$-модуля, которая вполне характеризуется тем, что канонический гомоморфизм $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ совместим с алгебраическими структурами в $\mathscr{S}'$ и $\mathscr{S}$.

Определим теперь *фактор-модуль* $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}/\mathscr{S}'$. Для этого введем отношение эквивалентности $R(U)$ в $\mathscr{S}(U)$ для любого открытого в X множества U, положив $s \equiv t \mod R(U)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \mod \mathscr{S}'(U)$. Легко проверяется, что условия п. 1.9 выполнены и что, следовательно, можно определить пучок множеств $\mathscr{S}/R$. Напомним, что по определению этот пучок порождается предпучком

$$U \to \mathscr{S}(U)/R(U) = \mathscr{S}(U)/\mathscr{S}'(U).$$

Так как индуктивный предел точных последовательностей есть точная последовательность, то, очевидно, имеют место следующие канонические изоморфизмы

$$\mathscr{S}''(x) = \mathscr{S}(x)/\mathscr{S}'(x),$$

так что для любого x на $\mathscr{S}''(x)$ определена структура левого $\mathscr{A}(x)$-модуля. Это позволяет считать $\mathscr{S}''$ левым $\mathscr{A}$-модулем, и мы, таким образом, получаем искомый $\mathscr{A}$-модуль $\mathscr{S}/\mathscr{S}'$. Очевидно, что структура левого $\mathscr{A}$-модуля на $\mathscr{S}''$ вполне определяется требованием, чтобы канонический гомоморфизм пучков множеств $\mathscr{S} \to \mathscr{S}''$ был гомоморфизмом $\mathscr{A}$-модулей.

Если рассматривать на пучке $\mathscr{S} = \mathscr{A}$ каноническую структуру левого $\mathscr{A}$-модуля, то $\mathscr{A}$-подмодули модуля $\mathscr{S}$ называются *пучками левых идеалов* над X.

Пример 2.3.1. Пусть X — топологическое пространство, A — кольцо и $\mathscr{A}$ — простой пучок с базой X и слоем A. Пусть $\mathscr{S}$ — пучок идеалов в $\mathscr{A}$. Так как $\mathscr{A}(x)$ можно канонически отождествить с A, то на идеалы $\mathscr{S}(x)$ можно смотреть как на идеалы в кольце A. Но так как сечения пучка $\mathscr{A}$, а следовательно, и $\mathscr{S}$ представляют собой локально постоянные функции со значениями в A, то семейство идеалов $\mathscr{S}(x)$ кольца A обладает следующим свойством: *для каждого $a \in A$ множество всех тех элементов $x \in X$, для которых $a \in \mathscr{S}(x)$, является открытым в X.* Это свойство *вполне определяет* пучки идеалов.

Если A *нётерово* слева[1]), то из указанного свойства легко получаем следующий результат: для каждого левого идеала $\mathfrak{a}$ в A совокупность тех x, для которых $\mathfrak{a} \subset \mathscr{S}(x)$, является открытым

[1]) Кольцо называется нётеровым слева, если всякий его левый идеал имеет конечный базис. — *Прим. ред.*

множеством в X. Это можно выразить также следующим образом: для любого x мы имеем

$$\mathscr{L}(x) \subset \mathscr{L}(y)$$

для всех y, достаточно близких к x.

В частности, возьмем в качестве A кольцо $\mathbf{Z}$ целых рациональных чисел. Идеалы кольца $\mathbf{Z}$ взаимно однозначно соответствуют целым положительным числам. Значит, в этом случае пучки идеалов соответствуют функциям $x \to n(x)$, принимающим целые неотрицательные значения и удовлетворяющим следующему условию: *для всех y, достаточно близких к x, целое число $n(x)$ делится на* $n(y)$. Заметим, что для каждого целого $n \geqslant 0$ множество тех x, для которых $n(x)$ делит n, открыто. Следовательно, если X квазикомпактно (т. е. удовлетворяет аксиоме Бореля — Лебега), то функция $n(x)$ принимает лишь *конечное* число различных значений.

Пример 2.3.2. Пусть X — алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем k, K — поле рациональных функций на X и $\mathcal{O}$ — пучок локальных колец над X (см. пример 2.1.4). Постараемся описать все пучки идеалов в $\mathcal{O}$. Пусть $\mathcal{J}$ — некоторый пучок идеалов в $\mathcal{O}$; тогда $\mathcal{J}(x)$ является идеалом кольца $\mathcal{O}(x)$ для любого $x \in X$. Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти условия, при которых задание для каждого x идеала $\mathcal{J}(x)$ локального кольца $\mathcal{O}(x)$ определяет пучок идеалов над X. Так как эта задача имеет, очевидно, локальный характер, то можно предположить, что многообразие X *аффинно*, т. е. в K существует такая аффинная алгебра $A = \mathcal{O}(X)$, что совокупность колец $\mathcal{O}(x)$ есть совокупность локальных колец $A_{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}$ пробегает множество максимальных идеалов кольца A. Обозначим через $\mathfrak{m}(x)$ идеал, соответствующий точке x (т. е. множество рациональных функций, определенных на всем X и обращающихся в нуль в точке x). В силу элементарных свойств колец отношений идеал $\mathcal{J}(x)$ в $\mathcal{O}(x)$ порождается некоторым идеалом из A, а именно идеалом $\mathfrak{a}(x) = A \cap \mathcal{J}(x)$. Вместе с тем кольцо A нётерово, потому что оно имеет конечное число образующих над k. Фиксируем некоторую точку $x \in X$ и функции $f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, порождающие идеал $\mathfrak{a}(x)$. Рассматривая функции f_i как сечения пучка $\mathcal{O}$ над X, мы видим, что порожденные ими ростки сечений в точке x принадлежат к $\mathcal{J}(x)$. Значит, если y достаточно близка к точке x, то ростки сечений пучка $\mathcal{O}$, определенные функциями f_i в точке y, также принадлежат к $\mathcal{J}(y)$. Это, очевидно, означает, что $f_i \in \mathfrak{a}(y)$ для y, достаточно близких к x. Другими словами, мы имеем $\mathfrak{a}(x) \subset \mathfrak{a}(y)$, когда y достаточно близка к точке x.

Пример 2.3.3. (Дивизоры на комплексном аналитическом многообразии.) Пусть X — комплексное аналитическое многообразие и $\mathcal{O}$ — пучок ростков голоморфных функций на X. Так как для любого $x \in X$ кольцо $\mathcal{O}(x)$ не имеет делителей нуля, то можно

рассмотреть его поле отношений $\mathscr{M}(x)$. На сумме $\mathscr{M}$ множеств $\mathscr{M}(x)$ определим структуру пучка с базой X, потребовав, чтобы отображение $x \to f(x)/g(x)$ было сечением пучка $\mathscr{M}$ над открытым в X множеством U, если f и g — сечения пучка $\mathscr{O}$ над U, причем $g(x) \neq 0$ для любого $x \in U$. [Заметим, что через $g(x)$ мы обозначаем здесь *росток* функции g в точке x, а не *значение* голоморфной функции g в точке x.] Говорят, что $\mathscr{M}$ есть *пучок ростков мероморфных функций на* X. Сечение пучка $\mathscr{M}$ над открытым множеством U является по определению мероморфной функцией на U.

Очевидно, что $\mathscr{M}$ — пучок коммутативных колец и $\mathscr{O}$ — подпучок пучка $\mathscr{M}$. Для всякого открытого множества U обозначим через $\mathscr{M}^*(U)$ (соответственно $\mathscr{O}^*(U)$) мультипликативную группу обратимых элементов кольца $\mathscr{M}(U)$ (соответственно $\mathscr{O}(U)$). Отображения

$$U \to \mathscr{M}^*(U) \quad \text{и} \quad U \to \mathscr{O}^*(U)$$

порождают пучки абелевых групп над X, причем $\mathscr{O}^*$ является подпучком абелевых групп пучка $\mathscr{M}^*$. Фактор-пучок

$$\mathscr{D} = \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$$

есть по определению *пучок ростков дивизоров* многообразия X а его сечения над X называются *дивизорами* многообразия X. Следовательно, дивизор на X может быть получен (бесконечным множеством способов) следующим образом: выберем некоторое открытое покрытие (U_i) многообразия X, для каждого U_i выберем мероморфную обратимую функцию f_i и потребуем, чтобы на $U_i \cap U_j$ отношение f_i/f_j было *голоморфной* и *обратимой* функцией, т. е. не обращалось бы в нуль ни в одной точке из $U_i \cap U_j$.

В частности, всякая мероморфная на X функция определяет некоторый дивизор на X. Получающиеся таким способом дивизоры называются *главными дивизорами* на X. Вообще говоря, на X могут существовать и не главные дивизоры. Так, например, если X компактно и имеет комплексную размерность 1, то в силу классической теоремы Абеля фактор-группа группы дивизоров на X по подгруппе главных дивизоров на X изоморфна прямому произведению аддитивной группы целых чисел и комплексного тора размерности g, где g — род кривой X.

Пример 2.3.4. (Дивизоры на алгебраическом многообразии.) Пусть X — алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем k и $\mathscr{O}$ — пучок локальных колец над X. Поступая точно так же, как в предыдущем примере, можно определить пучки $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}^*$, $\mathscr{O}^*$ и $\mathscr{D}$. Сечения пучка $\mathscr{D}$ над открытым множеством U будем называть дивизорами на U.

Положение в этом случае является более простым, чем в случае комплексного аналитического многообразия. Действительно, пусть

K — поле рациональных функций на X. Тогда пучок $\mathcal{M}$ есть простой пучок с базой X и слоем K, так как для любого x поле отношений кольца $\mathcal{O}(x)$ канонически изоморфно полю K, так же как и поле отношений кольца $\mathcal{O}(U)$ для всякого достаточно малого открытого в X множества U (разумеется, мы предполагаем, что X *неприводимо*). Следовательно, для всякого открытого U выполняется равенство $\mathcal{M}^*(U) = K^*$, где K^* — мультипликативная группа элементов из K, отличных от нуля, и $\mathcal{O}^*(U)$ является подгруппой в K^*, образованной рациональными функциями, которые определены и не равны нулю на всем U.

2.4. Каноническое разложение гомоморфизма.

В этом пункте мы покажем, что аддитивная категория левых модулей над пучком колец $\mathcal{A}$ с базой X удовлетворяет аксиоме (КА2) абелевых категорий.

Рассмотрим для этого гомоморфизм $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ левых $\mathcal{A}$-модулей. Мы построим сейчас, и притом каноническим образом, ядро, коядро, образ и кообраз гомоморфизма f.

(a) *Ядро гомоморфизма* f. Обозначим через $\mathcal{L}'(x)$ для любого $x \in X$ ядро отображения $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{M}(x)$, определенного гомоморфизмом f. Легко проверяется, что объединение $\mathcal{L}'$ всех множеств $\mathcal{L}'(x)$ является $\mathcal{A}$-подмодулем в $\mathcal{L}$. Пусть i — каноническое вложение пучка $\mathcal{L}'$ в $\mathcal{L}$; тогда *пара* $(\mathcal{L}', i)$ *есть ядро гомоморфизма* f. В самом деле, рассмотрим такой гомоморфизм $g : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$, что $f \circ g = 0$. Тогда g отображает $\mathcal{P}(x)$ в $\mathcal{L}'(x)$ при любом x и, следовательно, g представимо одним и только одним способом в виде композиции некоторого гомоморфизма $\mathcal{P} \to \mathcal{L}'$ с гомоморфизмом i. Тем самым наше утверждение доказано.

(b) *Образ гомоморфизма* f. Пусть $\mathcal{M}'$ — подпучок множеств в $\mathcal{M}$, являющийся образом пучка $\mathcal{L}$ при гомоморфизме f (см. п. 1.8). Очевидно, что $\mathcal{M}'$ является $\mathcal{A}$-подмодулем в $\mathcal{M}$ и что f представим в виде композиции канонических гомоморфизмов $p : \mathcal{L} \to \mathcal{M}'$ и $j : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$. *Пара* $(p, \mathcal{M}')$ *есть образ гомоморфизма* f. Действительно, так как

$$\mathcal{M}'(x) = f(x)(\mathcal{L}(x)),$$

то $\mathcal{M}'$ можно при помощи p отождествить с фактор-модулем $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$. Отсюда, очевидно, следует, что для того чтобы гомоморфизм $g : \mathcal{L} \to \mathcal{P}$ удовлетворял соотношению $g \circ i = 0$ (где i — канонический гомоморфизм $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}$), необходимо и достаточно, чтобы g можно было представить в виде композиции канонического гомоморфизма p с некоторым гомоморфизмом $\mathcal{M}' \to \mathcal{P}$.

(c) *Коядро гомоморфизма* f. Рассмотрим фактор-модуль $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}/\mathcal{M}'$ и канонический гомоморфизм $q : \mathcal{M} \to \mathcal{M}''$. Для того чтобы

гомоморфизм $h: \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ удовлетворял соотношению $h \circ f = 0$, необходимо и достаточно, чтобы h отображал в нуль все модули $\mathcal{M}'(x)$, т. е. чтобы выполнялось соотношение $q \circ j = 0$, где j — канонический гомоморфизм $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$. Следовательно, можно утверждать, что $(q, \mathcal{M}'')$ есть коядро гомоморфизма f.

(d) *Кообраз гомоморфизма* f. Как легко видеть, кообразом гомоморфизма f является пара $(\mathcal{M}', j)$.

Таким образом, всякий гомоморфизм в категории $\mathcal{A}$-модулей обладает ядром и коядром, и, более того, образ и кообраз гомоморфизма канонически изоморфны. Это означает, что аксиома (КА2) выполнена.

В дальнейшем мы будем всегда отождествлять ядро гомоморфизма $f: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ с подмодулем $\mathcal{L}'$ модуля $\mathcal{L}$, а образ и кообраз гомоморфизма f — с подмодулем $\mathcal{M}'$ модуля $\mathcal{M}$. Тогда коядро гомоморфизма f отождествится с фактор-модулем $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$. Значит, для каждой точки $x \in X$ будем иметь следующие канонические изоморфизмы:

$$\begin{gathered}\operatorname{Ker}(f)(x) = \operatorname{Ker}(f(x)),\\ \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)),\\ \operatorname{Coker}(f)(x) = \operatorname{Coker}(f(x)),\\ \operatorname{Coim}(f)(x) = \operatorname{Coim}(f(x)).\end{gathered}$$

2.5. Точные последовательности $\mathcal{A}$-модулей.

Результаты предыдущего пункта позволяют дать определение *точной последовательности* в категории левых $\mathcal{A}$-модулей. Последовательность

$$\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{N}$$

называется *точной*, если $g \circ f = 0$ и если гомоморфизм $\operatorname{Im}(f) \to \operatorname{Ker}(g)$, вытекающий из этого условия, является изоморфизмом. Так как мы условились отождествлять $\operatorname{Im}(f)$ и $\operatorname{Ker}(g)$ с $\mathcal{A}$-подмодулями в $\mathcal{M}$, то точность рассматриваемой последовательности, очевидно, означает совпадение этих подмодулей. Другими словами, для каждой точки $x \in X$ соответствующая последовательность $\mathcal{A}(x)$-модулей

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{f(x)} \mathcal{M}(x) \xrightarrow{g(x)} \mathcal{N}(x)$$

должна быть точной. Это следует из того, что пучок $\operatorname{Im}(f)$ есть объединение модулей

$$\operatorname{Im}(\mathcal{L}(x) \to \mathcal{M}(x))$$

и что подпучок $\operatorname{Ker}(g)$ есть объединение модулей $\operatorname{Ker}(\mathcal{M}(x) \to \mathcal{N}(x))$. Очевидным образом определяются теперь точные последовательности с несколькими членами. Сказанное выше позволяет нам сформулировать следующий результат.

Теорема 2.5.1. *Для того чтобы последовательность левых $\mathscr{A}$-модулей и гомоморфизмов была точна, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ функтор $\mathscr{L} \to \mathscr{L}(x)$ переводил ее в точную последовательность левых $\mathscr{A}(x)$-модулей.*

Следовательно, функтор $\mathscr{L} \to \mathscr{L}(x)$ на категории $\mathscr{A}$-модулей со значениями в категории $\mathscr{A}(x)$-модулей является *точным функтором*.

Напротив, если M — произвольное подмножество в X, то функтор $\mathscr{L} \to \mathscr{L}(M)$ является только *точным слева*, поскольку сечения фактор-пучка $\mathscr{L}/R$, вообще говоря, нельзя „поднять" до сечений пучка $\mathscr{L}$ над всем M, как мы это уже видели в п. 1.9.

Укажем другой, особенно важный, пример точного слева функтора. Пусть $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп над пространством X. Положим

$$\Gamma(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X).$$

Таким образом, $\Gamma(\mathscr{F})$ является абелевой группой сечений над всем X. Если s — такое сечение, то *носителем* сечения s назовем множество $|s|$ всех тех $x \in X$, для которых $s(x) \neq 0$. Так как дополнение к $|s|$ есть совокупность точек, где сечения s и 0 равны, то множество $|s|$ *замкнуто* в X. Зададим теперь в X множество Φ *замкнутых* подмножеств, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(a) *объединение двух множеств из* Φ *принадлежит* Φ,

(b) *всякое замкнутое подмножество, содержащееся в некотором множестве, принадлежащем* Φ, *есть множество из* Φ.

Мы будем говорить в этом случае, что Φ есть *семейство носителей в* X. Для всякого пучка $\mathscr{F}$ абелевых групп с базой X множество $\Gamma_\Phi(\mathscr{F})$ тех $s \in \Gamma(\mathscr{F})$, для которых $|s| \in \Phi$, является подгруппой группы $\Gamma(\mathscr{F})$. Отображение

$$\mathscr{F} \to \Gamma_\Phi(\mathscr{F})$$

является, очевидно, *точным слева функтором*, определенным на категории пучков абелевых групп с базой X.

Пример 2.5.1. Пусть X — n-мерное дифференцируемое многообразие. Для каждого целого $p \geqslant 0$ рассмотрим пучок Ω^p ростков дифференциальных форм степени p над X, который определим, сопоставив всякому открытому множеству U множество дифференциальных форм степени p на U. Операторы *внешнего дифференцирования* $\Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$, очевидно, определяют гомоморфизмы $d: \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ пучков вещественных векторных пространств. Кроме этого, замечая, что среди дифференциальных форм степени 0 на U (т. е. дифференцируемых функций на U) содержатся локально постоянные функции, получим вложение $j: \mathbf{R} \to \Omega^0$ простого пучка со слоем $\mathbf{R}$ в Ω^0. Оказывается, что в этих обозначениях *последовательность*

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{j} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$$

является *точной*. Так как утверждение носит чисто локальный характер, то для его доказательства можно предполагать, что X есть пространство $\mathbf{R}^n$. Но тогда оно вытекает из классической теоремы Пуанкаре, согласно которой дифференциальная форма ω на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющая условию $d\omega = 0$, представима в виде $d\bar{\omega}$, если ее степень $\geqslant 1$, и является постоянной, если ее степень равна 0.

Очевидно, что для произвольного многообразия X аналогичный результат в целом, вообще говоря, не имеет места; другими словами, *последовательность абелевых групп*

$$0 \to \mathbf{R} \to \Omega^0(X) \to \ldots \to \Omega^n(X) \to 0$$

в общем случае не является точной (см. по этому вопросу п. 4.7).

Пример 2.5.2. Пусть X—топологическое пространство, A—некоторая абелева группа, и пусть задано некоторое целое $n \geqslant 0$. Сопоставим каждому открытому в X множеству U абелеву группу отображений $U^{n+1} \to A$ и для $U \supset V$ определим очевидным образом операторы ограничения. Получаем, таким образом, предпучок над X (легко проверяется, что он удовлетворяет аксиоме (F2), хотя (F1), вообще говоря, не выполняется). Порожденный им *пучок* абелевых групп есть *пучок ростков коцепей Александера—Спаньера степени n на X со значениями в A*. Обозначим его через $\mathscr{F}^n(X;\ A)$.

Если каждому отображению $f: U^{n+1} \to A$ сопоставим отображение $df: U^{n+2} \to A$, определенное равенством

$$df(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}),$$

то этим, очевидно, определяется гомоморфизм пучков

$$d: \mathscr{F}^n(X;\ A) \to \mathscr{F}^{n+1}(X;\ A).$$

С другой стороны, отождествив A с простым пучком над X со слоем A, получим вложение

$$j: A \to \mathscr{F}^0(X;\ A).$$

Построенная таким образом *последовательность пучков абелевых групп*

$$0 \to A \xrightarrow{j} \mathscr{F}^0(X;\ A) \xrightarrow{d} \mathscr{F}^1(X;\ A) \xrightarrow{d} \ldots$$

точна. Действительно, пусть некоторый росток коцепи степени n в точке x аннулируется гомоморфизмом d. В некоторой окрестности U точки x его можно представить отображением $f: U^{n+1} \to A$, которое аннулируется оператором d. Если $n = 0$, то это, очевидно, означает, что f постоянно. Если $n \geqslant 1$, то определим отображение $g: U^n \to A$ равенством

$$g(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Легко проверяется, что $f = dg$, откуда вытекает наше утверждение.

Заметим, что в приведенных примерах для того, чтобы установить точность последовательности

$$\mathscr{L} \xrightarrow{f} \mathscr{M} \xrightarrow{g} \mathscr{N},$$

применялся следующий принцип. Сначала проверяется, что $g \circ f = 0$, а затем — что для любого сечения $s \in \mathscr{M}(U)$, которое аннулируется гомоморфизмом g, существует на любом *достаточно малом* открытом множестве $V \subset U$ такое сечение $t \in \mathscr{L}(V)$, что ограничение s на V является образом сечения t при гомоморфизме f. Это означает, что пучок $\mathrm{Ker}(g)$, определяемый отображениями

$$U \to \mathrm{Ker}\,[\mathscr{M}(U) \to \mathscr{N}(U)],$$

порождается предпучком

$$U \to \mathrm{Im}\,[\mathscr{L}(U) \to \mathscr{M}(U)].$$

2.6. Прямые произведения $\mathscr{A}$-модулей.

Пусть $(\mathscr{L}_i)_{i \in I}$ — некоторое семейство левых $\mathscr{A}$-модулей. Тогда пучок

$$\mathscr{L} = \prod_{i \in I} \mathscr{L}_i,$$

определенный в п. 1.10, является канонически левым $\mathscr{A}$-модулем, а гомоморфизмы

$$pr_i : \mathscr{L} \to \mathscr{L}_i$$

— гомоморфизмами левых $\mathscr{A}$-модулей, которые к тому же являются эпиморфизмами. Свойство универсальности, сформулированное в п. 1.10, переписывается здесь следующим образом. Если заданы гомоморфизмы $\mathscr{A}$-модулей

$$f_i : \mathscr{M} \to \mathscr{L}_i,$$

то существует, и притом единственный, гомоморфизм $f : \mathscr{M} \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}_i$, удовлетворяющий условию $f_i = pr_i\, f$ для каждого i. Иначе говоря, справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}\Big(\mathscr{M}, \prod_{i \in I} \mathscr{L}_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \mathscr{L}_i).}$$

Отсюда, очевидно, следует, что категория левых $\mathscr{A}$-модулей удовлетворяет аксиоме (КАЗ) абелевых категорий (и даже намного более сильной аксиоме!). Таким образом, как мы уже говорили, эта категория является *абелевой*.

2.7. Прямые суммы $\mathcal{A}$-модулей.

При тех же условиях, что и в предыдущем пункте, определим пучок

$$\mathcal{L}' = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$$

как пучок, *порожденный* предпучком

$$U \to \sum_{i \in I} \mathcal{L}_i(U).$$

Пучок $\mathcal{L}'$, очевидно, является левым $\mathcal{A}$-подмодулем прямого произведения пучков $\mathcal{L}_i$. Для того чтобы сечение (s_i) прямого *произведения*, определенное на открытом множестве U, было сечением прямой *суммы*, необходимо и достаточно, чтобы на любом достаточно малом открытом множестве $V \subset U$ сечения s_i не равнялись нулю только для конечного числа $i \in I$. Это показывает, что понятия прямого произведения и прямой суммы совпадают каждый раз, когда семейство $(\mathcal{L}_i)$ *локально конечно*, т. е. в случае, когда для любого достаточно малого открытого множества U индуцированные пучки $\mathcal{L}_i | U$ отличны от нуля лишь для конечного числа $i \in I$.

Встав на точку зрения накрывающих пространств, приходим к равенству

$$\mathcal{L}'(x) = \sum_{i \in I} \mathcal{L}_i(x),$$

причем топология в $\mathcal{L}'$ такова, что естественные вложения $\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}'$ являются гомоморфизмами пучков.

Понятие прямой суммы обладает свойством „универсальности“, аналогичным указанному в предыдущем пункте. Его можно выразить соотношением

$$\boxed{\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}\Big(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i, \mathcal{M}\Big) = \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_i, \mathcal{M}).}$$

Пусть $\mathcal{L}$ — левый $\mathcal{A}$-модуль и $\mathcal{L}'$ — подмодуль в $\mathcal{A}$, положим $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}/\mathcal{L}'$. Говорят, что $\mathcal{L}'$ — *прямое слагаемое в* $\mathcal{L}$, если существует изоморфизм модуля $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ на $\mathcal{L}$, который индуцирует на $\mathcal{L}'$ тождественное отображение. Для этого достаточно потребовать также, чтобы вложение $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}'$ продолжалось до гомоморфизма $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ или чтобы существовал гомоморфизм $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}$, композиция которого с $\mathcal{L} \to \mathcal{L}''$ дает тождественное отображение.

Пусть последовательность

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

точна. Рассмотрим точный слева ковариантный функтор T со значениями, например, в категории абелевых групп. Тогда для того, чтобы последовательность

$$0 \to T(\mathscr{L}') \to T(\mathscr{L}) \to T(\mathscr{L}'') \to 0$$

была точна, достаточно, чтобы модуль $\mathscr{L}'$ был прямым слагаемым в $\mathscr{L}$ [1]).

2.8. Тензорные произведения.

Пусть $\mathscr{A}$—пучок колец над X, $\mathscr{L}$—правый $\mathscr{A}$-модуль и $\mathscr{M}$—левый $\mathscr{A}$-модуль. Введем обозначение

$$\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}$$

для *пучка абелевых групп*, порожденного предпучком

$$U \to \mathscr{L}(U) \underset{\mathscr{A}(U)}{\otimes} \mathscr{M}(U),$$

для которого операторы ограничения определяются естественным образом с помощью операторов ограничения пучков $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$. Заметим, что если $\mathscr{A}$ — пучок коммутативных колец, то тензорное произведение также является $\mathscr{A}$-модулем.

В силу результатов гл. I, п. 1.6 об индуктивных пределах тензорных произведений можно также определить тензорное произведение следующим образом. Слоем над точкой x является

$$(\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M})(x) = \mathscr{L}(x) \underset{\mathscr{A}(x)}{\otimes} \mathscr{M}(x),$$

а топология накрывающего пространства $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ характеризуется тем, что если s и t — сечения пучков $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ над открытым множеством U, то формула

$$x \to s(x) \otimes t(x)$$

определяет сечение тензорного произведения над U.

Тензорные произведения $\mathscr{A}$-модулей можно охарактеризовать свойством „универсальности“ аналогично тому, как это было сделано в гл. I. Мы оставляем это читателю. Большинство алгебраических свойств тензорных произведений может быть распространено, в общем довольно тривиально, на случай пучков. Например, для всякого левого $\mathscr{A}$-модуля имеет место канонический изоморфизм

$$\mathscr{A} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M} = \mathscr{M}$$

[1]) Этот результат остается, очевидно, справедливым в произвольных абелевых категориях.

разумеется, при условии, что $\mathcal{A}$ — пучок колец с единицей). Кроме того, *функтор* $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}$ *точен справа*; это легко увидеть из рассмотрения слоев над точками.

Пример 2.8.1. Пусть X — дифференцируемое многообразие и E — расслоенное многообразие над X, слой которого является векторным пространством. Обозначим через Ω^0 пучок ростков дифференцируемых функций над X и через Ω^0_E — пучок ростков дифференцируемых сечений расслоения E, который является Ω^0-модулем. Тогда сечения пучка

$$\Omega^p_E = \Omega^0_E \underset{\Omega^0}{\otimes} \Omega^p$$

представляют собой *дифференциальные формы степени p на X со значениями в E*. Точно так же, если обозначить через $\mathcal{D}'^p$ *пучок ростков потоков степени p на X* (см. книгу Ж. де Рама по теории дифференцируемых многообразий[1])), то потоки степени p со значениями в E суть сечения пучка $\Omega^0_E \underset{\Omega^0}{\otimes} \mathcal{D}'^p$.

При $p = 0$ получаем *сечения-распределения* расслоенного многообразия E. Можно определить также *сечения-меры* расслоения E и т. д.

2.9. Точная последовательность, связанная с локально замкнутым подпространством.

Говорят, что подпространство Y в X *локально замкнуто*, если для всякой точки $a \in Y$ найдется в X открытая окрестность $U(a)$, для которой $Y \cap U(a)$ является замкнутым множеством в подпространстве $U(a)$. Другими словами, Y — открытое подпространство в $\overline{Y}$, или еще

$$Y = U \cap F,$$

где U открыто, а F замкнуто в X.

Теорема 2.9.1. *Пусть A — подпространство в X. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

(LF1) *A локально замкнуто в X*;

(LF2) *для любого пучка $\mathcal{L}$ абелевых групп над X существует пучок $\mathcal{L}_A$ над X, который индуцирует над A пучок, изоморфный $\mathcal{L} \mid A$, а над $X \setminus A$ — нулевой пучок.*

Докажем сначала, что из (LF2) следует (LF1). Предположим, что над X существует пучок $\mathcal{L}$, который индуцирует $\mathbf{Z}$ над A и 0 над $X \setminus A$. Для любого $a \in A$ над некоторой открытой окрест-

[1]) Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956. — *Прим. ред.*

ностью $U(a)$ точки a в X существует сечение s пучка $\mathscr{S}$, для которого $s(a)=1$. Если $U(a)$ достаточно мало, то мы будем иметь $s(x)=1$ для любого $x \in A \cap U(a)$ и, разумеется, $s(x)=0$ на $U(a)\setminus A$. Так как точки из $U(a)$, в которых s равно нулю, образуют открытое множество, то A локально замкнуто.

Для доказательства обратного утверждения достаточно установить следующий результат.

Теорема 2.9.2. *Пусть A — локально замкнутое подпространство в X. Для всякого пучка $\mathscr{S}$ абелевых групп над A существует, и притом только один, пучок $\mathscr{S}^X$ абелевых групп над X, который индуцирует $\mathscr{S}$ над A и 0 над $X\setminus A$.*

Докажем сначала единственность в предположении существования пучка $\mathscr{S}^X$. Так как $\mathscr{S}^X(x)=0$ для $x \in X\setminus A$, то для любого открытого множества U справедливо включение

$$\mathscr{S}^X(U)\subset\mathscr{S}(U\cap A),$$

которое получается, если отождествить сечение s над U с его ограничением на $U\cap A$. Полученные таким способом сечения из $\mathscr{S}(U\cap A)$ — это как раз те сечения, которые при продолжении нулем на множество $U\setminus(U\cap A)$ остаются *непрерывными*, другими словами, это те сечения, *носители*[1] *которых замкнуты в* U (а не только в $U\cap A$). Это и приводит нас к единственности пучка $\mathscr{S}^X$.

Перейдем теперь к доказательству существования пучка $\mathscr{S}^X$. Обозначим через $\mathscr{S}^X(U)$ *подгруппу в* $\mathscr{S}(U\cap A)$, *образованную сечениями, носители которых относительно замкнуты в* U. Для $U\supset V$ операторы ограничения $\mathscr{S}(U\cap A)\to\mathscr{S}(V\cap A)$, очевидно, отображают $\mathscr{S}^X(U)$ в $\mathscr{S}^X(V)$. Таким образом, получаем предпучок $U\to\mathscr{S}^X(U)$. Легко проверяется, что на самом деле это *пучок* абелевых групп. Остается убедиться в том, что он индуцирует 0 на $X\setminus A$ и $\mathscr{S}$ на A.

Очевидно, что $\mathscr{S}^X$ индуцирует 0 на $X\setminus\bar{A}$. Пусть $x\in\bar{A}\setminus A$, и пусть s — любое сечение из $\mathscr{S}^X(U)$, где U — некоторая открытая окрестность точки x в X. Так как s, будучи сечением пучка $\mathscr{S}$ над $U\cap A$, имеет в качестве носителя S замкнутое подмножество пространства U и так как S не содержит x, то существует открытая окрестность V точки x в U (а следовательно, и в X), которая не пересекается с S. Таким образом, s индуцирует 0 на V. Переходя к пределу, получаем, что $\mathscr{S}^X(x)=0$.

[1]) Пусть $\mathscr{S}$ — пучок абелевых групп над X и s — некоторое сечение пучка $\mathscr{S}$ над подмножеством M из X. *Носителем* сечения s называют множество точек $x\in M$, для которых $s(x)\neq 0$. Так как всякое нулевое в точке сечение равно нулю и в некоторой ее окрестности (потому что отображение $x\to 0$ является сечением пучка $\mathscr{S}$), то носитель сечения s есть *относительно замкнутое* подмножество в M.

Пусть теперь $x \in A$. Тогда существует окрестность U точки x, для которой $A \cap U$ замкнуто в U. Следовательно, для каждой открытой окрестности V, содержащейся в U, выполняется равенство $\mathscr{L}^X(V) = \mathscr{L}(V \cap A)$, откуда в пределе $\mathscr{L}^X(x) = \mathscr{L}(x)$ для любого $x \in A$. Осталось убедиться в том, что отождествление пучков $\mathscr{L}^X \mid A$ и $\mathscr{L}$ совместимо с топологиями этих двух пучков, т. е. что сечения над $U \cap A$ пучка, индуцированного пучком $\mathscr{L}^X$, совпадают с сечениями пучка $\mathscr{L}$. Но если обозначить временно через $\mathscr{M}$ пучок, индуцированный пучком $\mathscr{L}^X$, и если заметить, что $A \cap U$ замкнуто в U, то очевидно [принимая во внимание, что $\mathscr{L}^X$ индуцирует 0 на $U \setminus U \cap A$], что сечения пучка $\mathscr{M}$ над $U \cap A$, продолженные нулем на $U \setminus U \cap A$, остаются непрерывными. Другими словами, $\mathscr{M}(U \cap A) = \mathscr{L}^X(U) = \mathscr{L}(U \cap A)$, что и требовалось доказать. Теоремы 2.9.1 и 2.9.2 полностью доказаны.

С точки зрения накрывающих пространств множество $\mathscr{L}_A$ можно вложить в множество $\mathscr{L}$ (в обозначениях теоремы 2.9.1), но это вложение совместимо с топологиями пучков только тогда, когда A *открыто* в X. В этом случае непосредственно очевидно, что если обозначить через $\mathscr{L}_A$ множество точек пучка $\mathscr{L}$, являющихся нулями или проектирующихся в A, то получится *подпучок* пучка $\mathscr{L}$, причем $\mathscr{L}_A$ индуцирует $\mathscr{L} \mid A$ на A и 0 на $X \setminus A$.

Напротив, если A *замкнуто* в X, то равенство

$$\mathscr{L}_A(U) = \mathscr{L}(A \cap U)$$

показывает, что имеется канонический гомоморфизм $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_A$, являющийся, очевидно, *эпиморфизмом*, который сопоставляет всякому сечению над U его ограничение на $U \cap A$. Заметим, что этот гомоморфизм аннулирует сечение s над U тогда и только тогда, когда s равно нулю на $U \cap A$, другими словами, когда носитель сечения s содержится в $U \setminus U \cap A$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.9.3. *Для любого замкнутого подпространства A из X и любого пучка $\mathscr{L}$ абелевых групп над X последовательность*

$$0 \to \mathscr{L}_{X \setminus A} \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}_A \to 0$$

точна.

Заметим, что если A и B — два локально замкнутых подпространства, то существует следующий канонический изоморфизм:

$$(\mathscr{L}_A)_B = \mathscr{L}_{A \cap B}.$$

В частности, если представить A в виде $A = U \cap F$, где U открыто, а F замкнуто в X, то $\mathscr{L}_A = (\mathscr{L}_U)_F = (\mathscr{L}_F)_U$. Это показывает, что $\mathscr{L}_A$ является фактор-пучком некоторого подпучка пучка $\mathscr{L}$, а также подпучком некоторого фактор-пучка пучка $\mathscr{L}$.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что для всякого пучка $\mathscr{L}$ абелевых групп над X имеется следующий канонический изоморфизм:

$$\mathscr{L}_A = \mathbf{Z}_A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathscr{L}.$$

Так как $\mathbf{Z}_A$ — пучок абелевых групп, слои которого изоморфны либо 0, либо $\mathbf{Z}$, то отсюда, очевидно, следует, что *функтор* $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_A$ *точен.*

Теорема 2.9.1 показывает, что всякий пучок над локально замкнутым подпространством в X индуцируется некоторым пучком с базой X. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.9.4. *Пусть A — подпространство топологического пространства X. Всякий пучок $\mathscr{L}$ множеств (соответственно абелевых групп) с базой A индуцируется некоторым пучком множеств (соответственно абелевых групп) с базой X.*

Действительно, рассмотрим над X пучок

$${}^X\mathscr{L} : U \to \mathscr{L}(A \cap U)$$

с естественными операторами ограничения (проверка аксиом пучков тривиальна).

Слой ${}^X\mathscr{L}(a)$ над точкой $a \in A$ является индуктивным пределом множеств $\mathscr{L}(A \cap U)$, когда $A \cap U$ пробегает направленное семейство открытых окрестностей точки a в A. Следовательно, для любого $a \in A$ получаем канонический изоморфизм

$${}^X\mathscr{L}(a) = \mathscr{L}(a).$$

С топологической точки зрения получается взаимно однозначное отображение накрывающего пространства $\mathscr{L}$ на накрывающее пространство ${}^X\mathscr{L} \mid A$, совместимое с каноническими проекциями этих двух пространств на A. Остается только показать, что это взаимно однозначное отображение непрерывно в обе стороны. Для этого достаточно убедиться в том, что для всякого открытого в X множества U сечения пучка ${}^X\mathscr{L}$ над $U \cap A$ отождествляются с сечениями пучка $\mathscr{L}$ над $U \cap A$. Итак, пусть s — сечение пучка ${}^X\mathscr{L}$ над $U \cap A$. Тогда для любого $a \in U \cap A$ существуют открытая окрестность $V(a)$ точки a в X и сечение s_a пучка ${}^X\mathscr{L}$ над $V(a)$, которое индуцирует s на $V(a) \cap A$. Но по определению пучка ${}^X\mathscr{L}$ сечение s_a отождествляется с некоторым сечением пучка $\mathscr{L}$ над $V(a) \cap A$. Очевидно, тем самым доказана непрерывность s как отображения пространства $A \cap U$ в накрывающее пространство $\mathscr{L}$. Обратно, из определения пучка ${}^X\mathscr{L}$ ясно, что всякое сечение пучка $\mathscr{L}$ над $U \cap A$ определяет некоторое сечение пучка ${}^X\mathscr{L}$ над тем же множеством. Теорема доказана.

Разумеется, пучок ${}^X\mathscr{S}$, вообще говоря, не равен 0 вне подпространства A.

Замечание 2.9.1. Пусть $\mathscr{S}$ — пучок абелевых групп с базой X и U — открытое в X множество. Тогда имеет место канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}_U, \mathscr{S}) = \mathscr{S}(U).$$

Действительно, рассмотрим гомоморфизм $f: \mathbf{Z}_U \to \mathscr{S}$. Он отображает единичное сечение пучка $\mathbf{Z}_U$ над U в некоторое сечение $\bar{f} \in \mathscr{S}(U)$, знание которого полностью определяет гомоморфизм f. Обратно, всякое сечение $s \in \mathscr{S}(U)$ определяет, очевидно, гомоморфизм простого пучка со слоем $\mathbf{Z}$ и базой U в индуцированный пучок $\mathscr{S} \mid U$. Переходя к каноническим расширениям этих пучков на все X, получаем гомоморфизм пучка $\mathbf{Z}_U$ в $\mathscr{S}_U$, а значит, и в $\mathscr{S}$, так как $\mathscr{S}_U$ есть подпучок в $\mathscr{S}$, что и требовалось доказать.

Отсюда выводится, что $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}_U, \mathscr{S})$ является не чем иным, как пучком

$$V \to \mathscr{S}(U \cap V)$$

с очевидными операторами ограничения. Этот пучок нельзя смешивать с пучком $\mathscr{S}_U$.

Замечание 2.9.2. Установленное выше соотношение $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}_U, \mathscr{S}) = \mathscr{S}(U)$ позволяет доказать, что *всякий пучок $\mathscr{S}$ абелевых групп над X есть фактор-пучок некоторой прямой суммы пучков вида $\mathbf{Z}_U$*. Действительно, рассмотрим семейство $(U_i, s_i)_{i \in I}$, где U_i — открытые в X множества и s_i — сечения пучка $\mathscr{S}$ над U_i. Каждое s_i определяет гомоморфизм $\mathbf{Z}_{U_i} \to \mathscr{S}$ и тем самым (см. п. 2.7) гомоморфизм

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}_{U_i} \to \mathscr{S}.$$

Для того чтобы этот гомоморфизм был эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для любого x абелева группа $\mathscr{S}(x)$ порождалась элементами $s_i(x)$, отвечающими тем индексам i, для которых $x \in U_i$. Отсюда, очевидно, следует наше утверждение.

Замечание 2.9.3. Пусть X — топологическое пространство, $\mathbf{Z}$ — простой пучок с базой X, слоем которого является кольцо целых рациональных чисел и $\mathscr{S}$ — подпучок абелевых групп пучка $\mathbf{Z}$. Для любого x имеем $\mathscr{S}(x) = n(x) \cdot \mathbf{Z}$, где $n(x)$ — однозначно определенное неотрицательное целое число, обладающее тем свойством, что $n(x)$ делится на $n(y)$ для всех y, достаточно близких к x (пример 2.3.1). Мы получим отсюда важные сведения о пучке $\mathscr{S}$ в том случае, когда пространство X квазикомпактно. Из этого предположения следует, что $n(x)$ принимает только *конечное* число значений.

Пусть U — множество тех x, для которых $n(x) \neq 0$. Множество U является, очевидно, *открытым* в X, так как топология в пучке $\mathbf{Z}$

отделима. Для всякого целого $s \geqslant 1$ неравенство $n(x) \leqslant s$ определяет в U *открытое* множество U_s, потому что любой делитель числа $n(x)$ будет $\leqslant n(x)$. Тем самым мы приходим к цепочке включений

$$U_1 \subset U_2 \subset \ldots,$$

причем $U_n = U$ для достаточно большого n, так как X квазикомпактно. Рассмотрим теперь подпучки

$$\mathscr{L}_s = \mathscr{L}_{U_s} \qquad (s \geqslant 1)$$

пучка $\mathscr{L}$. Тогда для $\mathscr{L}$ получим „композиционный ряд“

$$\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{L}_n = \mathscr{L},$$

последовательные факторы которого мы сейчас вычислим.

Очевидно, что $\mathscr{L}_1 = \mathbf{Z}_{U_1}$. Рассмотрим $\mathscr{L}_s/\mathscr{L}_{s-1}$ для $s > 1$ и введем локально замкнутое множество

$$A_s = U_s \setminus U_{s-1}.$$

Ясно, что этот фактор представляет собой пучок $\mathscr{L}_{A_s}$. Так как $n(x) = s$ для любого $x \in A_s$, т. е. $n(x)$ — целое число, не зависящее от x, то $\mathscr{L}_s/\mathscr{L}_{s-1}$ изоморфен пучку $\mathbf{Z}_{A_s}$.

Итак, *$\mathscr{L}$ допускает композиционный ряд конечной длины, последовательные факторы которого имеют вид $\mathbf{Z}_A$, где A — локально замкнутое множество из X.*

2.10. Полное тензорное произведение.

Пусть X и Y — два топологических пространства, A — основное кольцо, $\mathscr{L}$ — пучок правых A-модулей с базой X и $\mathscr{M}$ — пучок левых A-модулей с базой Y. Мы определим над *пространством* $X \times Y$ пучок абелевых групп

$$\mathscr{N} = \mathscr{L} \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \mathscr{M}$$

и будем называть его *полным тензорным произведением* пучков $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ над кольцом A. Эта терминология и значок $\widehat{\otimes}$ употребляются для того, чтобы избежать в случае $X = Y$ возможного смешения с понятием тензорного произведения, введенным в п. 2.8.

Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$\mathscr{N}(x, y) = \mathscr{L}(x) \otimes_A \mathscr{M}(y).$$

Остается только установить условие, при котором отображение

$$(x, y) \to u(x, y) \in \mathscr{N}(x, y),$$

определенное на открытом в $X \times Y$ множестве W, является *сечением* пучка $\mathscr{N}$. Это условие состоит в следующем. *Какова бы ни была точка* $(x_0, y_0) \in W$, *существуют открытая в* Y *окрестность* V *точки* y_0 *и открытая в* X *окрестность* U *точки* x_0, *сечения* $s_i \in \mathscr{L}(U)$ *и сечения* $t_i \in \mathscr{M}(V)$ (*в конечном числе*), *для которых имеем*

$$U \times V \subset W \quad \textit{и} \quad u(x, y) = \sum s_i(x) \otimes t_i(y) \quad \textit{для} \quad x \in U, \ y \in V.$$

Обозначим теперь через $\mathscr{N}(W)$ множество отображений u, удовлетворяющих этим условиям. Если $W' \subset W$, то имеется, естественно, гомоморфизм ограничения $\mathscr{N}(W) \to \mathscr{N}(W')$, причем легко проверяются аксиомы предпучков. Проверка аксиом (F1) и (F2) для пучков также тривиальна. Чтобы установить, что $\mathscr{N}(x, y)$ есть в точности группа ростков сечений пучка $\mathscr{N}$ в точке (x, y), достаточно показать, что через любой элемент группы $\mathscr{N}(x, y)$ „проходит" некоторое сечение (что очевидно), и притом локально только одно.

Для этого достаточно доказать, что если сечения $s_i \in \mathscr{L}(U)$ и $t_i \in \mathscr{M}(V)$, взятые в конечном числе, таковы, что элемент $\sum s_i(x) \otimes t_i(y) \in \mathscr{L}(x) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(y)$ равен нулю в точке $(x_0, y_0) \in U \times V$, то он равен нулю также и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Но поскольку

$$\mathscr{L}(x) = \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{L}(U), \quad \mathscr{M}(y) = \varinjlim_{V \ni y} \mathscr{M}(V),$$

то имеет место канонический изоморфизм

$$\mathscr{L}(x) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(y) = \varinjlim_{\substack{U \ni x \\ V \ni y}} \mathscr{L}(U) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(V).$$

По предположению элемент $\sum s_i \otimes t_i$ из $\mathscr{L}(U) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(V)$ равен нулю в $\mathscr{L}(x_0) \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}(y_0)$. Поэтому можно, изменяя в случае надобности U и V, предположить, что он тождественно равен нулю (в силу самого определения индуктивного предела). Тем самым наше утверждение доказано.

Ясно, что для любых открытых множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ можно определить отображение

$$\mathscr{L}(U) \times \mathscr{M}(V) \to \mathscr{L} \underset{A}{\widehat{\otimes}} \mathscr{M}(U \times V),$$

которое билинейно относительно основного кольца A и совместимо, в очевидном смысле, с операторами ограничения.

Обратно, пусть заданы некоторый пучок $\mathscr{P}$ абелевых групп над $X \times Y$ и A-билинейные отображения

$$\mathscr{L}(U) \times \mathscr{M}(V) \to \mathscr{P}(U \times V),$$

совместимые с операторами ограничения. Тогда эти отображения представимы в виде композиций определенных выше билинейных

отображений с однозначно определенным гомоморфизмом

$$\mathscr{L} \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \mathscr{M} \to \mathscr{P}.$$

Это свойство показывает, что полное тензорное произведение является решением „проблемы универсальности“, аналогичной той, которая приводит в алгебре к понятию тензорного произведения двух модулей над кольцом.

2.11. Обратный образ пучка при непрерывном отображении.

Пусть X и Y — два топологических пространства и f — непрерывное отображение пространства X в Y. Как мы видели (п. 1.12), отображение f позволяет сопоставить каждому пучку множеств $\mathscr{M}$ с базой Y пучок множеств $\mathscr{L} = f^*(\mathscr{M})$ — *обратный образ* пучка $\mathscr{M}$ при отображении f. Напомним, что для всякого открытого множества $U \subset X$ сечения пучка $\mathscr{L}$ над U можно канонически отождествить с *непрерывными* отображениями s пространства U в топологическое пространство $\mathscr{M}$, которые удовлетворяют условию

$$s(x) \in \mathscr{M}(f(x)) \text{ для любого } x \in U. \tag{1}$$

Предположим теперь, что $\mathscr{M}$ — *пучок колец* над Y. Очевидно, что решения условия (1) образуют кольцо, в котором сумма и произведение определяются формулами

$$(s+t)(x) = s(x) + t(x), \quad (st)(x) = s(x)\,t(x).$$

Более того, эти операции совместимы с операторами ограничения в $\mathscr{L}$. Таким образом, на $\mathscr{L}$ может быть канонически введена структура *пучка колец*.

Пусть, более общим образом, $\mathscr{B}$ — пучок колец над Y и $\mathscr{M}$ — левый $\mathscr{B}$-модуль. Тогда $\mathscr{L} = f^*(\mathscr{M})$ является левым $\mathscr{A}$-модулем, где $\mathscr{A} = f^*(\mathscr{B})$. Чтобы убедиться в этом, достаточно определить „естественным“ образом произведение некоторого сечения $s \in \mathscr{A}(U)$ на сечение $t \in \mathscr{L}(U)$. Представив s и t отображениями пространства U в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{M}$, положим

$$(st)(x) = s(x)\,t(x).$$

Ясно, что для всякого $x \in X$ отображение f индуцирует гомоморфизм *колец* $\mathscr{A}(x) \to \mathscr{B}(f(x))$ и гомоморфизм *модулей* $\mathscr{L}(x) \to \mathscr{M}(f(x))$, совместимый с предыдущим гомоморфизмом.

Переходя к примерам, рассмотрим пространство X, основное кольцо A, пучок $\mathscr{L}$ правых A-модулей и пучок $\mathscr{M}$ левых A-модулей с базой X. Тогда *тензорное произведение* $\mathscr{L} \otimes_A \mathscr{M}$ *канонически изоморфно обратному образу полного тензорного произведения*

$\mathscr{L} \widehat{\otimes}_A \mathscr{M}$ *при диагональном отображении*

$$x \to (x, x)$$

пространства X *в* $X \times X$. Оставляем читателю доказать это утверждение в качестве упражнения.

Другой пример получается при рассмотрении пучка $\mathscr{L}$ абелевых групп над пространством X. Для всякого подпространства Y из X *индуцированный пучок* $\mathscr{L}|Y$ *канонически изоморфен обратному образу пучка* $\mathscr{L}$ *при каноническом вложении* $Y \to X$.

Наиболее важным свойством операции взятия обратного образа является следующее: функтор $\mathscr{M} \to f^*(\mathscr{M})$, определенный на категории пучков абелевых групп с базой Y, со значениями в категории пучков абелевых групп с базой X является *точным* функтором. Действительно, для всякой точки $x \in X$ мы имеем каноническое *взаимно однозначное отображение* множества $f^*(\mathscr{M})(x)$ на $\mathscr{M}(f(x))$ (см. п. 1.12), которое, очевидно, совместимо с аддитивными структурами этих двух множеств. Отсюда непосредственно следует наше утверждение.

2.12. Прямой образ пучка.

Рассмотрим, как и прежде, два пространства X и Y и непрерывное отображение $f: X \to Y$. Тогда для всякого пучка множеств $\mathscr{A}$ с базой X определяется (см. п. 1.13) прямой образ $f(\mathscr{A})$ с базой Y, а именно пучок

$$V \to \mathscr{A}(f^{-1}(V)).$$

Предположим теперь, что $\mathscr{A}$ — пучок колец с базой X. Предыдущее определение показывает, что на множествах $f(\mathscr{A})(V)$ имеется структура кольца, совместимая с операторами ограничения. Следовательно, $f(\mathscr{A})$ можно „естественным“ образом рассматривать как *пучок колец* с базой Y. Если $\mathscr{L}$ — левый $\mathscr{A}$-модуль, то аналогичные рассуждения показывают, что $f(\mathscr{L})$ является левым $f(\mathscr{A})$-модулем.

Заметим, что функтор $\mathscr{L} \to f(\mathscr{L})$ *точен слева*. Действительно, если последовательность $\mathscr{A}$-модулей над X

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}''$$

точна, то для любого открытого множества U последовательность

$$0 \to \mathscr{L}'(U) \to \mathscr{L}(U) \to \mathscr{L}''(U)$$

точна и, следовательно, для каждого открытого множества $V \subset Y$ точна последовательность

$$0 \to f(\mathscr{L}')(V) \to f(\mathscr{L})(V) \to f(\mathscr{L}'')(V),$$

откуда и следует наше утверждение. Напротив, функтор $\mathscr{L} \to f(\mathscr{L})$ не точен справа, за исключением тривиальных, мало интересных случаев.

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ И ПОДЪЕМ СЕЧЕНИЙ

3.1. Вялые пучки.

Пучок $\mathscr{F}$ множеств над пространством X называется *вялым*, если для любого открытого в X множества U отображение ограничения

$$\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$$

есть *отображение на все* $\mathscr{F}(U)$.

Так будет, например, в том случае, когда $\mathscr{F}$ есть пучок ростков *всех* (не обязательно непрерывных) сечений какого-нибудь расслоенного пространства с базой X. Так как всякий пучок является пучком ростков сечений некоторого накрывающего пространства над X, то легко убеждаемся в том, что *всякий пучок множеств можно погрузить в вялый пучок*. Точнее, для каждого пучка $\mathscr{F}$ пучок $\mathscr{C}^0(X; \mathscr{F})$, определяемый формулой

$$U \to \prod_{x \in U} \mathscr{F}(x)$$

вместе с очевидными отображениями ограничения, является вялым пучком, содержащим $\mathscr{F}$.

Пучки такого рода будут играть фундаментальную роль в следующем параграфе.

Пример 3.1.1. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над полем k. Как мы уже видели, в этом случае пересечение любых двух открытых непустых множеств не пусто и, следовательно, всякое открытое в X множество *связно*. Из этого факта вытекает, что *всякий простой пучок над X является вялым* („теорема Гротендика“) [1]. Нетрудно убедиться также и в том, что вялым пучком будет пучок ростков дивизоров над X (но, конечно, не пучок локальных колец над X).

Вялость пучка $\mathscr{F}$ является *локальным* свойством. Действительно, предположим, что $\mathscr{F} \mid U$ — вялый пучок для любого достаточно малого открытого множества U, и пусть s — сечение пучка $\mathscr{F}$ над произвольным открытым множеством V. Рассмотрим множество E пар

[1]) Разумеется, то, что X — алгебраическое многообразие, не является здесь существенным. Результат верен для любого неприводимого топологического пространства (см. примечание на стр. 147). — *Прим. ред.*

(V', s'), где $V' \supset V$ и $s' \in \mathcal{F}(V')$ индуцирует s на V. Упорядочив E с помощью отношения „продолжения", получим, очевидно, индуктивное множество[1]). Пусть (V', s') — максимальный элемент в E и пусть $V' \neq X$. Тогда существует открытое множесто U, не содержащееся в V', для которого $\mathcal{F} | U$ — вялый пучок. Это позволяет продолжить на U ограничение сечения s' на $U \cap V'$ и, следовательно, продолжить s' на $U \cup V'$. Таким образом, $V' = X$, т. е. $\mathcal{F}$ — вялый „в целом" пучок. Обратно, очевидно, что вялый пучок индуцирует на любом открытом множестве снова вялый пучок.

Теорема 3.1.1. *Прямой образ вялого пучка при непрерывном отображении есть вялый пучок.*

Пусть заданы непрерывное отображение $f: X \to Y$, вялый пучок $\mathcal{A}$ с базой X и пусть $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$. Тогда по определению прямого образа для любого открытого в Y множества V коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X) & \to & \mathcal{A}(f^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(Y) & \to & \mathcal{B}(V) \end{array}$$

По определению прямого образа вертикальные стрелки суть взаимно однозначные отображения на все множество. Верхняя горизонтальная стрелка есть отображение на все множество, так как $\mathcal{A}$ — вялый пучок. Отсюда и следует теорема.

Теорема 3.1.2. *Пусть*

$$0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$$

— точная последовательность пучков абелевых групп. Если $\mathcal{L}'$ — вялый пучок, то для каждого открытого U точна последовательность

$$0 \to \mathcal{L}'(U) \to \mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}''(U) \to 0$$

(т. е. точна последовательность предпучков).

Можно считать, что $U = X$, и все сводится к доказательству того, что произвольное сечение $s'' \in \mathcal{L}''(X)$ порождается некоторым сечением пучка $\mathcal{L}$. Рассмотрим множество E пар (U, s), где $s \in \mathcal{L}(U)$ индуцирует s'' на U, упорядоченное с помощью отношения „продолжения". Тогда E — индуктивное множество. Пусть (U, s) — максимальный элемент в E. Если $x \in X \setminus U$, то существует окрестность V точки x и сечение $t \in \mathcal{L}(V)$, которое индуцирует s'' на V. Сечения s и t отличаются на $U \cap V$ только на сечение пучка $\mathcal{L}'$, которое можно продолжить на V, так как $\mathcal{L}'$ — вялый пучок. Следовательно, изменив t, если это необходимо, можно считать, что $s = t$ на $U \cap V$.

[1]) Частично упорядоченное множество называется индуктивным, если в нем всякое направленное подмножество имеет максимальный элемент.— *Прим. ред.*

Но тогда элемент (U, s) не является максимальным. Таким образом, $U = X$ и теорема доказана.

Следствие. *Если $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}$ — вялые пучки, то и $\mathscr{L}''$ — вялый пучок.*

Действительно, всякое сечение s'' пучка $\mathscr{L}''$ над U порождается некоторым сечением пучка $\mathscr{L}$ над U, которое продолжимо на все X. Следовательно, продолжимо на все X и s''.

Пусть Φ — семейство носителей в X (п. 2.5) и $\mathscr{L}$ — пучок абелевых групп над X. Обозначим через $\Gamma_\Phi(\mathscr{L})$ множество сечений $s \in \mathscr{L}(X)$, носители которых принадлежат семейству Φ. Оно, очевидно, образует абелеву группу, причем $\mathscr{L} \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L})$ является точным слева функтором (п. 2.5).

Теорема 3.1.3. *Пусть*

$$0 \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \ldots$$

— точная последовательность вялых пучков абелевых групп. Для любого семейства Φ носителей соответствующая последовательность абелевых групп

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^0) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^1) \to \ldots$$

точна.

Действительно, положим

$$\mathscr{Z}^p = \operatorname{Ker}[\mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^{p+1}] = \operatorname{Im}[\mathscr{L}^{p-1} \to \mathscr{L}^p].$$

Тогда, очевидно,

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{Z}^p) = \operatorname{Ker}[\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^p) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^{p+1})],$$

и все сводится к доказательству точности последовательностей

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{Z}^p) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^p) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{Z}^{p+1}) \to 0.$$

Однако последовательности

$$0 \to \mathscr{Z}^p \to \mathscr{L}^p \to \mathscr{Z}^{p+1} \to 0$$

точны. Следовательно, если $\mathscr{Z}^p$ — вялый пучок, то и $\mathscr{Z}^{p+1}$ — вялый пучок. Так как $\mathscr{Z}^0 = 0$ является вялым, то все пучки $\mathscr{Z}^p$ вялые. Таким образом, всякое сечение z^{p+1} пучка $\mathscr{Z}^{p+1}$ с носителем $S \in \Phi$ может быть поднято до некоторого сечения l^p пучка $\mathscr{L}^p$, и остается показать, что носитель сечения l^p можно предполагать принадлежащим Φ. Но l^p индуцирует на $X \setminus S$ некоторое сечение пучка $\mathscr{Z}^p$, которое можно продолжить на все X, так как $\mathscr{Z}^p$ — вялый пучок. Вычитая из l^p это сечение пучка $\mathscr{Z}^p$, мы и придем к искомому результату.

3.2. Паракомпактные пространства.

Пространство X называется *паракомпактным*, если оно *отделимо* и если для всякого открытого покрытия (U_i) пространства X существует *локально конечное* открытое покрытие[1]), вписанное в (U_i). Паракомпактное пространство нормально, однако обратное утверждение не верно. Всякое *замкнутое* подпространство паракомпактного пространства паракомпактно. *Метризуемые* пространства паракомпактны (следовательно, и все их подпространства, так как они тоже метризуемы), так же, как и локально компактные пространства, счетные в бесконечности (являющиеся объединением счетного числа компактных пространств).

Мы постоянно будем использовать (без ссылок) следующий результат. *Пусть $(U_i)_{i \in I}$ — открытое локально конечное покрытие нормального пространства X. Тогда существует такое открытое покрытие $(V_i)_{i \in I}$, что $\overline{V}_i \subset U_i$ для всех $i \in I$.*

Пусть X — некоторое пространство. Назовем *паракомпактифицирующим семейством* в X всякое семейство Φ подмножеств пространства X, удовлетворяющее следующим условиям:

(PRK1) *Подмножества $S \in \Phi$ замкнуты и паракомпактны.*

(PRK2) *Объединение конечного числа множеств, принадлежащих Φ, принадлежит Φ.*

(PRK3) *Любое замкнутое подмножество множества $S \in \Phi$ принадлежит Φ.*

(PRK4) *Всякое $S \in \Phi$ обладает окрестностью*[2]), *принадлежащей Φ.*

Например, если X является открытым подпространством паракомпактного пространства $\hat{X}$, то *замкнутые в* $\hat{X}$ подмножества $S \subset X$ образуют паракомпактифицирующее семейство в $\hat{X}$. Таким способом получается всякое паракомпактифицирующее семейство, если только объединение всех $S \in \Phi$ есть все X.

Если Φ — семейство носителей в X и Y — подпространство в X, то через $\Phi | Y$ мы всегда будем обозначать совокупность тех $S \in \Phi$, которые содержатся в Y. Если при этом Y замкнуто, то $\Phi | Y$ есть также совокупность пересечений $S \cap Y$, $S \in \Phi$.

[1]) Покрытие (M_i) пространства X называется локально конечным, если каждая точка из X обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств M_i. — *Прим. ред.*

[2]) Под *окрестностью* множества $S \subset X$ понимается любое множество $M \subset X$, для которого существует такое открытое U, что $S \subset U \subset M$. Таким образом, окрестность не обязана быть открытой. — *Прим. ред.*

Если Φ — паракомпактифицирующее семейство и Y — *локально замкнутое* в X множество, то $\Phi|Y$ является паракомпактифицирующим семейством в Y, как в этом легко убедиться, рассмотрев равенство $Y=U\cap F$, где U — открытое и F — замкнутое множества.

3.3. Локальное продолжение сечения.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — пучок множеств над пространством X, S — подмножество в X и s — некоторое сечение пучка $\mathscr{F}$ над S.*

Если S допускает в X фундаментальную систему паракомпактных окрестностей, то s продолжается на некоторую окрестность множества S в X.

Можно, очевидно, считать X паракомпактным пространством. С другой стороны, можно покрыть S открытыми множествами U_i и найти такие $s_i\in\mathscr{F}(U_i)$, что $s_i=s$ на $S\cap U_i$. Заменив X паракомпактной окрестностью множества S, содержащейся в $\bigcup U_i$, можно считать, что U_i покрывают X и даже что это покрытие локально конечно. Выберем второе покрытие V_i так, чтобы $\overline{V}_i\subset U_i$ для всех i, и обозначим через W множество тех $x\in X$, для которых из

$$x\in\overline{V}_i\cap\overline{V}_j \text{ следует, что } s_i(x)=s_j(x).$$

В силу теоремы 1.3.1, примененной к пучку $\mathscr{F}|W$, существует сечение пучка $\mathscr{F}$ над W, которое индуцирует s_i на $W\cap\overline{V}_i$. Оно, очевидно, является продолжением сечения s, и остается, следовательно, показать, что W есть окрестность множества S.

Пусть $x\in S$, тогда существует открытая окрестность $W(x)$, пересечение которой с множествами $\overline{V}_i$ не пусто лишь для $\overline{V}_{i_1},\ldots,\overline{V}_{i_p}$. Изменяя в случае необходимости $W(x)$, можно считать, что все эти множества содержат x и что $W(x)$ содержится в множествах $\overline{U}_{i_1},\ldots,\overline{U}_{i_p}$. Сечения $s_{i_1},\ldots,s_{i_p}$ определены в точке x и, очевидно, равны в этой точке. Так как их конечное число, то можно считать, что они равны на всем открытом множестве $W(x)$. Таким образом, $W(x)\subset W$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{F}$ — пучок с базой X и S — подпространство в X, допускающее фундаментальную систему паракомпактных окрестностей. Тогда*

$$\mathscr{F}(S)=\varinjlim_{U\supset S}\operatorname{ind}\mathscr{F}(U),$$

где предел берется по упорядоченному (по включению) направленному множеству окрестностей U подпространства S в X.

Действительно, каждое сечение пучка $\mathcal{F}$ над S продолжается на некоторую окрестность U подпространства S в X. Кроме того, если сечения над окрестностями U и V подпространства S в X совпадают на S, то они совпадают и на некоторой окрестности $W \subset U \cap V$ множества S.

Предыдущее следствие применимо, в частности, в случае, когда X паракомпактно, а S замкнуто, или когда X метризуемо, а S произвольно.

Следствие 2. *Пусть A — некоторое подпространство метризуемого пространства X. Всякий вялый пучок с базой X индуцирует над A вялый пучок.*

Действительно, если $\mathcal{F}$ — вялый пучок с базой X, то ясно, что любое сечение пучка $\mathcal{F}$ над *произвольным* подмножеством в X продолжается на все X, откуда и вытекает справедливость следствия.

3.4. Мягкие пучки на паракомпактных пространствах.

Пусть X — паракомпактное пространство, $\mathcal{F}$ — пучок множеств над X. Если $\mathcal{F}$ — вялый пучок, то из теоремы 3.3.1 следует, что *всякое сечение пучка $\mathcal{F}$ над некоторым замкнутым множеством продолжимо на все X.*

Будем говорить вообще, что пучок с базой X является *мягким*, если он обладает этим свойством. Это свойство в действительности имеет *локальный* характер. Точнее говоря, справедлив следующий результат.

Теорема 3.4.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над паракомпактным пространством X. Предположим, что каждая точка из X имеет окрестность U, удовлетворяющую следующему условию; всякое сечение пучка $\mathcal{F}$ над замкнутым подмножеством в X, содержащимся в U, продолжается на U. Тогда $\mathcal{F}$ — мягкий пучок.*

Пусть s — некоторое сечение пучка $\mathcal{F}$ над замкнутым множеством S. Можно найти для X локально конечное покрытие $(U_i)_{i \in I}$ открытыми множествами, обладающими сформулированным выше свойством, и затем такое покрытие (V_i), что $\overline{V}_i \subset U_i$ для любого i. Положим $F_i = \overline{V}_i$ и

$$F_J = \bigcup_{i \in J} F_i$$

для любого подмножества J в I.

Рассмотрим теперь множество E пар (t, J), где $J \subset I$ и t — некоторое сечение пучка $\mathcal{F}$ над F_J, равное s на $S \cap F_J$. Заметим, что это множество не пусто (достаточно взять одно U_i, которое пересекается с S, и продолжить на F_i сечение s, определенное на $S \cap F_i$). Его можно упорядочить, положив $(t', J') < (t'', J'')$, если

$J' \subset J''$ и $t' = t''$ на $F_{J'}$. Упорядоченное множество E *индуктивно*, как можно заметить, используя теорему 1.3.1. Пусть (t, J) — максимальный элемент множества E. Остается доказать, что $J = I$. Предположим, что существует индекс i, не принадлежащий к J, и положим $J' = J \cup \{i\}$. Чтобы прийти к противоречию, достаточно построить сечение t' над F_i, которое на $F_J \cap F_i$ совпадает с t, а на $F_i \cap S$ совпадает с s. Но так как $t = s$ на $F_J \cap S$, то задача сводится к продолжению на F_i сечения, заданного на замкнутом подмножестве F_i, что возможно в силу выбора U_i. Теорема доказана.

Теорема 3.4.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — мягкий пучок над паракомпактным пространством X. Тогда $\mathcal{F}$ индуцирует мягкий пучок над каждым замкнутым подпространством в X, а если X метризуемо — то даже над каждым локально замкнутым подпространством в X.*

Первое утверждение тривиально. Для того чтобы установить второе, рассмотрим локально замкнутое подпространство A в X и точку x из A. Точка x имеет в X такую *замкнутую* окрестность $V(x)$, что $A \cap V(x)$ замкнуто. Всякое замкнутое в A множество, содержащееся в $V(x)$, будет, таким образом, замкнутым и в X, откуда следует теорема, если принять во внимание определение мягкого пучка и использовать теорему 3.4.1 (что возможно, так как A паракомпактно).

Следствие. *Пусть $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ — локально конечное семейство пучков абелевых групп над паракомпактным пространством X. Если все $\mathcal{F}_i$ — мягкие пучки, то их прямая сумма будет также мягким пучком.*

Действительно, пусть $x \in X$. Тогда существует окрестность U точки x, для которой семейство индуцированных пучков $\mathcal{F}_i | U$ содержит только конечное число ненулевых пучков. Можно предположить, очевидно, что U замкнуто и, следовательно, паракомпактно. Так как для конечного семейства доказываемое следствие тривиально, то прямая сумма $\mathcal{F}$ пучков $\mathcal{F}_i$ индуцирует над U мягкий пучок Таким образом, $\mathcal{F}$ — мягкий пучок.

3.5. Ф-мягкие пучки.

Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X и $\mathcal{F}$ — пучок множеств над X. Говорят, что F есть Φ-*мягкий пучок*, если для любого $S \in \Phi$ индуцированный пучок $\mathcal{F} | S$ является мягким, т. е. если для $S', S'' \in \Phi$ и $S' \supset S''$ отображение ограничения

$$\mathcal{F}(S') \to \mathcal{F}(S'')$$

есть отображение на все множество. В силу теоремы 3.3.1 *всякий вялый пучок является Ф-мягким пучком.* С другой стороны, *прямая сумма локально конечной совокупности пучков $\mathscr{F}_i$ абелевых групп есть Ф-мягкий пучок, если каждый пучок $\mathscr{F}_i$ есть Ф-мягкий пучок.* Действительно, для прямой суммы $\mathscr{F}$ пучков $\mathscr{F}_i$ справедлива формула

$$\mathscr{F}|S = \oplus(\mathscr{F}_i|S) \quad (S \in \Phi),$$

и поэтому наше утверждение вытекает из следствия теоремы 3.4.2.

Теорема 3.5.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп над X и Φ — паракомпактифицирующее семейство в X. Для того чтобы $\mathscr{F}$ был Ф-мягким пучком, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $S \in \Phi$ гомоморфизм $\Gamma_\Phi(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}(S)$ был эпиморфизмом.*

Действительно, пусть s — сечение над $S \in \Phi$. Возьмем некоторую *окрестность* $S' \in \Phi$ множества S. Тогда можно определить *сечение* пучка $\mathscr{F}$ над замкнутым множеством $S \cup F$ (где F — *граница* множества S'), положив его равным s над S и равным 0 над F. Это сечение продолжается на S', если $\mathscr{F}$ есть Ф-*мягкий* пучок. Но так как оно равно нулю на F, то его можно продолжить на X, считая его равным нулю на $X \setminus S'$. Теорема доказана.

Теорема 3.5.2. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X и*

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

— точная последовательность пучков абелевых групп. Если $\mathscr{L}'$ — Ф-мягкий пучок, то последовательность

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}') \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}'') \to 0$$

точна.

Предположим сначала, что X паракомпактно и Φ — семейство всех замкнутых подмножеств в X. Пусть s'' — произвольное сечение пучка $\mathscr{L}''$. Надо „поднять“ его до сечения пучка $\mathscr{L}$. Так как это можно сделать локально и так как X паракомпактно, то существуют локально конечное открытое покрытие $(U_i)_{i \in I}$ пространства X и сечения $s_i \in \mathscr{L}(U_i)$, представляющие сечение s'' на U_i. Выберем покрытие (V_i), для которого

$$F_i = \overline{V}_i \subset U_i$$

при всех i.

Рассмотрим теперь множество E пар (s, J), где $J \subset I$, а s — некоторое сечение пучка $\mathscr{L}$ над $F_J = \bigcup_{i \in J} F_i$, которое представляет на этом множестве сечение s''. Множество E, очевидно, не пусто и, будучи упорядочено по продолжению, индуктивно. Пусть (s, J) —

максимальный элемент множества E. Все сводится к доказательству того, что $J=I$. Пусть $i \in I \setminus J$. Возьмем тогда некоторое сечение s_i, представляющее s'' на U_i. На множестве $F_J \cap F_i$ сечения s и s_i отличаются только на сечение пучка $\mathscr{L}'$, которое продолжается на все U_i, так как $\mathscr{L}'$ — мягкий пучок. Таким образом, s можно продолжить на $F_J \cup F_i$, что приводит к противоречию.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть s'' — некоторое сечение из $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}'')$, а $S'' \in \Phi$ — его носитель. Так как $\mathscr{L}'|S''$ — мягкий пучок, то предшествующие рассуждения показывают, что s'' можно поднять до сечения s пучка $\mathscr{L}$ над S''. Пусть $S \in \Phi$ — окрестность множества S''. Можно предположить, что s продолжено на S. Остается только убедиться в том, что можно считать s равным нулю на границе F множества S. Но так как s'' равно нулю на F, то ограничение сечения s на F есть сечение пучка $\mathscr{L}'$, которое продолжается до сечения s' пучка $\mathscr{L}'$ над S, так как $\mathscr{L}'$ есть Φ-мягкий пучок. Мы получим требуемый результат, заменив s на $s-s'$.

Следствие. *Пусть X — паракомпактное (соответственно метризуемое) пространство и пусть*

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

— точная последовательность пучков абелевых групп над X. Если $\mathscr{L}'$ есть мягкий пучок, то последовательность

$$0 \to \mathscr{L}'(A) \to \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}''(A) \to 0$$

точна для любого замкнутого (соответственно локально замкнутого) подпространства $A \subset X$.

Это утверждение очевидно, так как пучок $\mathscr{L}'|A$ мягкий.

Теорема 3.5.3. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X и*

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

— точная последовательность пучков абелевых групп с базой X. Если $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}$ — Φ-мягкие пучки, то $\mathscr{L}''$ также Φ-мягкий пучок.

Теорема 3.5.4. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X и*

$$0 \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \ldots$$

— точная последовательность Φ-мягких пучков абелевых групп с базой X. Тогда последовательность

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^0) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^1) \to \ldots$$

точна.

Обе эти теоремы доказываются так же, как аналогичные результаты для вялых пучков.

Теорема 3.5.5. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X и A — локально замкнутое подпространство в X. Тогда*

(a) *всякий Φ-мягкий пучок $\mathscr{L}$ с базой X индуцирует* $(\Phi|A)$-*мягкий пучок на* A.

(b) *если $\mathscr{L}$ есть Φ-мягкий пучок абелевых групп с базой X, то пучок $\mathscr{L}_A$ также Φ-мягкий.*

(c) *если $\mathscr{F}$ есть* $(\Phi|A)$-*мягкий пучок абелевых групп с базой A, то пучок $\mathscr{F}^X$ с базой X есть Φ-мягкий пучок.*

Утверждение (a) тривиально.

Для того чтобы доказать утверждение (b), возьмем некоторое $S \in \Phi$. Надо показать, что $\mathscr{L}_A|S$ есть мягкий пучок. Так как $\mathscr{L}_A|S = (\mathscr{L}|S)_{A \cap S}$, то можно отвлечься от Φ и считать, что X паракомпактно. Тогда остается только рассмотреть случай, когда A — открытое множество, и случай, когда A — замкнутое множество.

Пусть A открыто и s — некоторое сечение пучка $\mathscr{L}_A$ над замкнутым множеством $S \subset X$. Это сечение будет сечением пучка $\mathscr{L}$ над S, равным нулю на $S \cap (X \setminus A)$. Так как $\mathscr{L}$ — мягкий пучок, то s можно продолжить до сечения t, определенного над всем X. Остается доказать, что можно считать t равным нулю на $X \setminus A$. Но так как s равно нулю на замкнутом множестве $S \cap (X \setminus A)$, то существует сечение s' пучка $\mathscr{L}$ над замкнутым множеством $S \cup (X \setminus A)$, равное s на S и нулю вне его. Взяв за t некоторое продолжение сечения s', получаем искомый результат. В случае, когда A — замкнутое множество, достаточно (теорема 3.5.3) заметить, что $\mathscr{L}_A = \mathscr{L}/\mathscr{L}_{X \setminus A}$.

Доказательство утверждения (c) также сводится к случаю, когда Φ — семейство всех замкнутых множеств паракомпактного пространства X. Семейство $\Phi|A$ образовано в этом случае теми $S \subset A$, которые замкнуты в X. Пусть s — некоторое сечение пучка $\mathscr{F}^X$ над замкнутым множеством B. Те $x \in B$, для которых $s(x) \neq 0$, образуют замкнутое подмножество в X, содержащееся в A, т. е. множество $S \in \Phi|A$. Следовательно (теорема 3.5.2), ограничение сечения s на $A \cap B$ продолжается до некоторого сечения пучка $\mathscr{F}$ над A, носитель которого замкнут в X, откуда очевидна продолжимость сечения s на все X.

3.6. Разложение сечения в мягком пучке.

Пусть $\mathscr{L}$ — пучок абелевых групп над пространством X и $(s_i)_{i \in I}$ — семейство сечений пучка $\mathscr{L}$ над X. Говорят, что семейство сечений *локально конечно*, если носители сечений s_i составляют в X локально конечную систему замкнутых множеств, другими словами, если для

каждого достаточно малого открытого множества U лишь конечное число сечений s_i не равно нулю на U. В этом случае можно определить *сечение*

$$s=\sum_{i\in I} s_i$$

пучка $\mathscr{S}$, положив для любого $x\in X$

$$s(x)=\sum_{i\in I} s_i(x).$$

Пусть теперь s — сечение пучка $\mathscr{S}$ над X и $(U_i)_{i\in I}$ — открытое покрытие пространства X. Назовем *разложением сечения* s, *подчиненным покрытию* (U_i), всякое разложение $s=\sum s_i$ сечения s в сумму *локально конечного* семейства сечений, обладающего тем свойством, что носитель каждого s_i содержится в соответствующем открытом множестве U_i. Ясно, что если существует разложение сечения s, подчиненное более мелкому покрытию, чем (U_i), то существует также разложение, подчиненное покрытию (U_i). Мы получим его, группируя подходящим образом члены первого разложения.

Теорема 3.6.1. *Пусть $\mathscr{S}$ — мягкий пучок абелевых групп над паракомпактным пространством X. Для всякого сечения s пучка $\mathscr{S}$ над X и для всякого открытого покрытия $(U_i)_{i\in I}$ существует разложение сечения s, подчиненное покрытию (U_i).*

Можно считать, что покрытие (U_i) локально конечно. Выберем некоторое замкнутое покрытие (F_i), для которого $F_i\subset U_i$ для всех i.

Рассмотрим множество E семейств $(s_i)_{i\in J}$, где $J\subset I$ и s_i — некоторое сечение пучка $\mathscr{S}$ над X, носитель которого содержится в U_i, причем

$$\sum_{i\in J} s_i=s \quad \text{на} \quad F_J=\bigcup_{i\in J} F_i.$$

Это множество не пусто и, будучи упорядочено по продолжению, индуктивно. Пусть $(s_i)_{i\in J}$ — максимальный элемент множества E; тогда все сводится к доказательству того, что $J=I$.

Но если существует $i\in I\setminus J$, то для того, чтобы прийти к противоречию, достаточно построить такое сечение $s_i\in\mathscr{S}(X)$, которое удовлетворяло бы следующим условиям: $s_i=0$ на $X\setminus U_i$ и

$$s_i=s-\sum_{j\in J} s_j \quad \text{на} \quad F_J\cup F_i.$$

В силу указанных условий s_i уже определено на замкнутом множестве

$$(F_J\cup F_i)\cup(X\setminus U_i),$$

так что s_i можно построить, если $\mathscr{S}$ — мягкий пучок. Теорема доказана.

3.7. Тонкие пучки.

Докажем сначала следующий результат.

Теорема 3.7.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A}$ — пучок колец с единицей над X и Φ — паракомпактифицирующее семейство в X. Если $\mathcal{A}$ есть Φ-мягкий пучок, то и каждый $\mathcal{A}$-модуль есть Φ-мягкий пучок.*

Можно оставить в стороне Φ и считать X паракомпактным пространством. Пусть $\mathcal{L}$ — левый $\mathcal{A}$-модуль и s — сечение пучка $\mathcal{L}$ над замкнутым множеством A. Как уже известно, s продолжается на некоторую окрестность B множества A, которую можно предполагать замкнутой в X. Остается только показать, что продолжение сечения s на B можно выбрать так, чтобы оно было равно нулю на границе F множества B в X.

Но так как $\mathcal{A}$ — мягкий пучок, то существует сечение u пучка $\mathcal{A}$ над X, которое равно 1 на A и 0 на F. Заменяя рассмотренное продолжение сечения s на сечение $x \to u(x)s(x)$, мы и приходим к искомому результату.

Учитывая то, что свойство пучка быть мягким носит локальный характер, замечаем, что предшествующее рассуждение приводит нас к следующему результату.

Теорема 3.7.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — пучок колец с единицей над паракомпактным пространством X. Для того чтобы $\mathcal{A}$ был мягким пучком, необходимо и достаточно, чтобы любая точка из X обладала такой окрестностью U, что для любых заданных непересекающихся замкнутых множеств S, $T \subset U$ существует сечение пучка $\mathcal{A}$ над U, равное 1 на S и 0 на T.*

Рассмотрим теперь пучок $\mathcal{L}$ абелевых групп над паракомпактным пространством X (соответственно над пространством X, снабженным паракомпактифицирующим семейством Φ). Говорят, что $\mathcal{L}$ — *тонкий* (соответственно Φ-*тонкий*) пучок, если пучок колец $\mathcal{H}om_Z(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ является *мягким* пучком (соответственно, если $\mathcal{L}|S$ является тонким пучком для любого $S \in \Phi$). Значит, для того чтобы пучок абелевых групп над паракомпактным пространством X был тонким, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух замкнутых непересекающихся множеств A и B из X существовал гомоморфизм $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$, индуцирующий тождественное отображение на некоторой окрестности множества A и 0 на некоторой окрестности множества B. Заметим, впрочем, что достаточно проверить это свойство локально, чтобы убедиться в том, что пучок $\mathcal{L}$ — тонкий. С другой стороны, ясно, что всякий Φ-тонкий пучок тем более является Φ-мягким пучком (теорема 3.7.1). Важность Φ-тонких пучков видна из этого последнего свойства, а также из следующего результата.

Теорема 3.7.3. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X и $\mathcal{L}$ — Φ-тонкий*

пучок абелевых групп. Для всякого пучка $\mathscr{M}$ абелевых групп с базой X пучок $\mathscr{L} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathscr{M}$ является Ф-тонким пучком.

Можно, очевидно, свести доказательство теоремы к случаю, когда $\mathscr{L}$ — тонкий пучок на паракомпактном пространстве X. Так как $\mathscr{L}$ — левый модуль над мягким пучком колец [а именно, над $\mathscr{H}om_{\mathbf{Z}}(\mathscr{L}, \mathscr{L})$], то тем же свойством обладает и $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$, откуда легко следует требуемый результат.

В действительности мы обычно будем использовать предыдущую теорему в следующей ослабленной форме: *если $\mathscr{L}$ — тонкий пучок, то пучок $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ — мягкий, каков бы ни был пучок $\mathscr{M}$.*

Пример 3.7.1. Пусть X — топологическое пространство и Ф — паракомпактифицирующее семейство. Тогда пучок $\mathscr{F}^0(X; \mathbf{Z})$ коцепей Александера — Спаньера степени 0 пространства X с целочисленными значениями (т. е. пучок ростков отображений пространства X в $\mathbf{Z}$) является Ф-тонким. Поскольку это пучок колец, то достаточно показать, что он Ф-мягкий. Пусть $S \in \Phi$ и A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества в S. Возьмем некоторую окрестность $S' \in \Phi$ множества S. Так как S' нормально, то в S' существуют непересекающиеся окрестности U и V множеств A и B и, следовательно, существует отображение $s: S' \to \mathbf{Z}$, равное 1 на U и 0 на V. Ограничив эту функцию на внутренность W множества S', получим сечение пучка $\mathscr{F}^0(X; \mathbf{Z})$, ограничение которого на S равно 1 на A и 0 на B (заметим, что не нужно смешивать ограничение сечения с ограничением функции s), что и требовалось доказать.

Из только что доказанного следует, что всякий $\mathscr{F}^0(X; \mathbf{Z})$-модуль является Ф-мягким и даже Ф-тонким пучком. Это относится, в частности, к пучкам $\mathscr{F}^n(X; G)$ Александера — Спаньера для любого $n \geqslant 0$ и любой абелевой группы G.

Аналогичные рассуждения с применением на этот раз теоремы Урысона показывают, что пучок ростков *непрерывных* вещественных функций является Ф-тонким. Следовательно, тем же свойством обладает всякий модуль над этим пучком колец, например пучок ростков сечений расслоенного пространства, слоями которого являются векторные пространства.

Если X — *паракомпактное дифференцируемое многообразие*, то, как мы покажем, пучок Ω^0 ростков дифференцируемых функций на X является Ф-тонким. Действительно, в силу теоремы 2 можно ограничиться (заменив X на относительно компактное открытое множество, изоморфное $\mathbf{R}^n$) доказательством следующего утверждения: для любых непересекающихся *компактных* множеств A и B в $\mathbf{R}^n$ существует дифференцируемая функция f, равная 1 в некоторой окрестности множества A и 0 в некоторой окрестности множества B. Для этого достаточно взять (теорема Урысона) непрерывную функ-

цию g, обладающую этими свойствами, а затем „регуляризовать" ее, т. е. заменить ее функцией

$$f(x)=\int g(x-y)\,h(y)\,dy,$$

где h — положительная дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторой достаточно малой окрестности начала координат, интеграл от которой равен 1.

Отсюда следует, что пучки Ω^p являются тонкими точно так же, как и всякий пучок Ω^0-модулей, например пучки ростков *потоков* со значениями в расслоенном многообразии с векторными слоями.

3.8. Лемма о покрытиях нормального пространства.

Прежде чем продолжать изучение пучков над паракомпактными пространствами, мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.8.1. *Пусть $(U_i)_{i\in I}$ — локально конечное открытое покрытие нормального пространства X. Предположим, что для каждой пары i, j и любого $x\in U_{ij}=U_i\cap U_j$ задана окрестность $V_{ij}(x)\subset U_{ij}$ точки x. Тогда для любого $x\in X$ найдется в X такая окрестность $V(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *если $x\in U_{ij}$, то $V(x)\subset V_{ij}(x)$;*

(b) *если $V(x)$ и $V(y)$ пересекаются, то существует такой индекс i, что U_i содержит $V(x)$ и $V(y)$.*

Так как покрытие U_i локально конечно, то легко удовлетворить условию (a). Для того чтобы удовлетворить условию (b), рассмотрим открытое покрытие (U'_i), для которого $\overline{U}'_i\subset U_i$ для всех i. Поскольку условие (a) выполняется, можно считать сверх того, что $x\in U'_i$ влечет за собой $V(x)\subset U'_i$. С другой стороны, существует лишь конечное число индексов i, для которых $V(x)$ пересекается с $\overline{U}'_i$, так что можно удовлетворить условию: $V(x)$ пересекается с $\overline{U}'_i$, если только $x\in\overline{U}'_i$.

Предположим теперь, что $V(x)$ и $V(y)$ пересекаются. Тогда найдется такое i, что $x\in U'_i$ и $V(x)\subset U'_i$. Следовательно, $V(y)$ пересекается с U'_i, а это показывает, что $y\in\overline{U}'_i$. Но тогда $y\in U_i$, так что U_i содержит $V(x)$ и $V(y)$. Лемма доказана.

3.9. Приложение к предпучкам.

Пусть $\mathscr{F}$ — предпучок множеств над пространством X и $\tilde{\mathscr{F}}$ — порожденный им пучок. Как мы уже видели (п. 1.2), отображение

$$\mathscr{F}(X) \to \tilde{\mathscr{F}}(X)$$

взаимно однозначно, если $\mathscr{F}$ удовлетворяет аксиоме (F1) пучков. Мы покажем теперь, что если X паракомпактно, а $\mathscr{F}$ удовлетворяет аксиоме (F2), то это есть отображение на $\tilde{\mathscr{F}}(X)$. Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 3.9.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — предпучок множеств над паракомпактным пространством X. Предположим, что выполнено следующее условие: если заданы локально конечное открытое покрытие $(U_i)_{i \in I}$ пространства X и такие элементы $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, что s_i и s_j на U_{ij} равны для любых i и j, то существует $s \in \mathscr{F}(X)$, ограничение которого на U_i равно s_i для любого i. Тогда каноническое отображение $\mathscr{F}(X) \to \tilde{\mathscr{F}}(X)$ есть отображение на $\tilde{\mathscr{F}}(X)$.*

Пусть s — сечение пучка $\tilde{\mathscr{F}}$ над всем X. Существует открытое покрытие (U_i) пространства X, которое можно считать локально конечным, и такие $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, которые представляют s на U_i. Пусть $x \in U_{ij}$. Так как s_i и s_j определяют один и тот же росток сечения в x, то существует такая окрестность $V_{ij}(x) \subset U_{ij}$, что ограничения элементов s_i и s_j на $V_{ij}(x)$ совпадают.

Возьмем теперь окрестности $V(x)$, существование которых обеспечивается леммой 3.8.1. Так как $V(x) \subset U_i$ для всякого такого i, что $x \in U_i$, то можно рассмотреть ограничение элемента s_i на $V(x)$. Это ограничение *не зависит от индекса i* в силу условия (a) леммы. Обозначим его через s_x. Если $V(x) \cap V(y)$ не пусто, то существует U_i, содержащее $V(x)$ и $V(y)$. Следовательно, s_x и s_y являются ограничениями элемента s_i и потому совпадают на $V(x) \cap V(y)$.

Заменяя покрытие $(V(x))_{x \in X}$ вписанным в него локально конечным покрытием, мы сведем наше утверждение к случаю, когда ограничения элементов s_i и s_j на U_{ij} всегда совпадают. Но тогда, по предположению, s_i являются ограничениями на U_i некоторого элемента из $\mathscr{F}(X)$. Так как он, очевидно, представляет данное сечение s, то теорема доказана.

В условиях теоремы 3.9.1 можно построить $\tilde{\mathscr{F}}(X)$ следующим образом. Назовем элементы s и t из $\mathscr{F}(X)$ *локально равными*, если равны их ограничения на всякое достаточно малое открытое множество. Таким образом, получаем в $\mathscr{F}(X)$ отношение эквивалентности, и $\tilde{\mathscr{F}}(X)$ представляет собой не что иное, как соответствующее фактор-множество. В частности, если $\mathscr{F}$ — предпучок

абелевых групп, то $\tilde{\mathscr{F}}(X)$ есть фактор-группа группы $\mathscr{F}(X)$ по подгруппе, образованной элементами из $\mathscr{F}(X)$, *локально равными нулю*.

Пример 3.9.1. (Сингулярные коцепи.) Пусть J — „стандартное" топологическое пространство (например, „стандартный симплекс" или „стандартный куб" в теории сингулярных гомологий). Если X — топологическое пространство, то назовем *сингулярным J-симплексом* пространства X всякое непрерывное отображение $s: J \to X$. Пусть $S_J(X)$ — множество таких отображений. Для произвольного множества A (наиболее важен случай абелевой группы) обозначим через

$$CS^J(X;\ A)$$

множество отображений $S_J(X) \to A$ („сингулярные J-коцепи пространства X со значениями в A").

Для открытых в X множеств U и $V \subset U$ имеет место вложение $S_J(V) \to S_J(U)$, которое позволяет определить оператор ограничения

$$CS^J(U;\ A) \to CS^J(V;\ A).$$

Следовательно, $U \to CS^J(U;\ A)$ есть *предпучок* множеств над X. Порожденный им пучок обозначим через $\mathscr{S}^J(X;\ A)$. Сечения этого пучка над X называют *локализованными сингулярными J-коцепями пространства X со значениями в A*.

Обозначим совокупность всех таких сечений через $S^J(X;\ A)$. Тогда имеется каноническое отображение

$$CS^J(X;\ A) \to S^J(X;\ A).$$

При этом два элемента α и $\beta \in CS^J(X;\ A)$ определяют одну и ту же коцепь тогда и только тогда, когда существует такое открытое покрытие (U_i), что $\alpha(s) = \beta(s)$ для всякого сингулярного J-симплекса s „порядка малости (U_i)", т. е. такого, для которого $s(J) \subset U_i$ при некотором i.

Предпучок $U \to CS^J(U;\ A)$ всегда удовлетворяет аксиоме (F2) *пучков*. Действительно, пусть (U_i) — семейство открытых множеств, объединение которых есть U, и пусть даны элементы $\alpha_i \in CS^J(U_i;\ A)$, для которых ограничения элементов α_i и α_j на U_{ij} совпадают. Это означает, что если s есть сингулярный J-симплекс пространства U_{ij}, то $\alpha_i(s) = \alpha_j(s)$. Пусть теперь s — некоторый сингулярный J-симплекс пространства U. Если s содержится в U_i, то элемент $\alpha_i(s) \in A$ не зависит от i и, следовательно, его можно обозначить через $\alpha(s)$. В противном случае выберем $\alpha(s)$ произвольным образом. Тем самым мы определим некоторый элемент $\alpha \in CS^J(U;\ A)$, который, очевидно, индуцирует α_i в U_i.

Таким образом, *отображение*

$$CS^J(X;\ A) \to S^J(X;\ A)$$

есть отображение на все множество, если X — паракомпактное пространство. Заметим, что это отображение никогда не является взаимно однозначным. Действительно, как уже отмечалось, два элемента $\alpha, \beta \in CS^J(X; A)$ определяют одно и то же сечение пучка $\mathcal{S}^J(X; A)$ тогда и только тогда, когда существует открытое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства X, для которого $\alpha(s) = \beta(s)$ для всякого сингулярного симплекса s порядка малости $\mathfrak{U}$.

Предыдущий результат позволяет доказать, что *пучок $\mathcal{S}^J(X; A)$ является вялым, если пространство X метризуемо* или, более общим образом, если всякое открытое множество U пространства X паракомпактно. Действительно, ясно, что $\mathcal{S}^J(X; A)$ индуцирует в U пучок $\mathcal{S}^J(U; A)$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} CS^J(X; A) & \to & CS^J(U; A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^J(X; A) & \to & S^J(U; A) \end{array}$$

коммутативна. Так как U и X — паракомпактные пространства, то две вертикальные стрелки суть отображения на все множество. Первая горизонтальная стрелка также, тривиальным образом, обладает этим свойством. Следовательно, отображение ограничения $S^J(X; A) \to S^J(U; A)$ есть отображение на все множество, что и доказывает наше утверждение.

Покажем теперь, что *для любого паракомпактного пространства X пучок $\mathcal{S}^J(X; A)$ является мягким*[1]). Определим сначала для всякого подпространства Y из X канонический гомоморфизм

$$\mathcal{S}^J(X; A) \mid Y \to \mathcal{S}^J(Y; A). \tag{1}$$

Для этого достаточно сопоставить, и притом естественным образом, всякому сечению α пучка $\mathcal{S}^J(X; A)$ над подмножеством Y из X некоторое сечение пучка $\mathcal{S}^J(Y; A)$ над Y. Покроем Y открытыми в X множествами U_i и выберем сингулярные J-коцепи $\alpha_i \in CS^J(U_i; A)$ так, чтобы они представляли α на U_i. Каждая α_i индуцирует сингулярную коцепь $\beta_i \in CS^J(U_i \cap Y; A)$, и семейство (β_i) определяет, очевидно, некоторое сечение β пучка $\mathcal{S}^J(Y; A)$ над Y, которое, как легко проверить, зависит только от α.

[1]) В случае, когда множество A есть абелева группа, тривиально проверяется, что $\mathcal{S}^J(X; A)$ — модуль над пучком колец $\mathcal{C}^0(X; \mathbf{Z})$ [выберем раз и навсегда точку $o \in J$ и будем для любого U рассматривать $CS^J(U; A)$ как $C^0(U; \mathbf{Z})$-модуль, считая произведением сингулярной коцепи $\alpha \in CS^J(U; A)$ и произвольной функции $n \in C^0(U; \mathbf{Z})$ сингулярную коцепь $s \to n(s(o))\,\alpha(s)$]. Следовательно, в этом случае $\mathcal{S}^J(X; A)$ является даже тонким пучком.

Разумеется, гомоморфизм (1), вообще говоря, не является изоморфизмом, но если обозначить через U внутренность множества Y, то гомоморфизм

$$\mathscr{S}^J(X;\ A)\,|\,U \to \mathscr{S}^J(Y;\ A)\,|\,U,$$

индуцированный гомоморфизмом (1), является изоморфизмом и после очевидных отождествлений сводится к тождественному изоморфизму

$$\mathscr{S}^J(U;\ A) \to \mathscr{S}^J(U;\ A).$$

Мы можем теперь доказать, что $\mathscr{S}^J(X;\ A)$ — мягкий пучок, если X — паракомпактное пространство. Пусть α — некоторое сечение этого пучка над замкнутым в X множеством F. Можно предполагать (теорема 3.3.1), что оно определено над некоторой замкнутой окрестностью Y множества F. Пусть β — то сечение пучка $\mathscr{S}^J(Y;\ A)$, которое получается из α при гомоморфизме (1). Так как Y — паракомпактное пространство, то β можно представить некоторым элементом множества $CS^J(Y;\ A)$, который по простым соображениям можно считать индуцированным некоторым элементом $\gamma \in CS^J(X;\ A)$. Тогда, как легко видеть, сечение пучка $\mathscr{S}^J(X;\ A)$ над X, определенное элементом γ, индуцирует α на внутренности U множества Y и, следовательно, тем более на F, откуда и следует указанное выше утверждение.

Заметим, что эти результаты применимы не только к обычным сингулярным коцепям. Если в качестве J взять одно из множеств Δ_n, рассмотренных в гл. I п. 3.1 [1]), то получатся результаты, применимые к коцепям Александера — Спаньера (пример 2.4.2).

3.10. Сечения индуктивного предела.

Мы докажем сейчас результат, который было бы интересно, если это возможно, распространить на более общий случай.

Теорема 3.10.1. *Пусть* $\mathscr{F} = \operatorname{lim\,ind} \mathscr{F}_\lambda$ — *индуктивный предел пучков множеств над компактным пространством* X. *Тогда каноническое отображение*

$$\operatorname*{lim\,ind}_{\lambda} \mathscr{F}_\lambda(X) \to \mathscr{F}(X)$$

есть взаимно однозначное отображение на $\mathscr{F}(X)$.

Покажем сначала, что это отображение взаимно однозначно. Предположим, что

$$s',\ s'' \in \operatorname{lim\,ind} \mathscr{F}_\lambda(X)$$

[1]) Разумеется, в Δ_n рассматривается дискретная топология. — *Прим. ред.*

определяют одно и то же сечение пучка $\mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ порожден предпучком

$$\mathscr{F}_0 : U \to \lim \operatorname{ind} \mathscr{F}_\lambda(U),$$

то существует такое конечное открытое покрытие (U_i) пространства X, что ограничения элементов s' и s'' на U_i совпадают. Но для подходящим образом выбранного индекса λ существуют s'_λ, $s''_\lambda \in \mathscr{F}_\lambda(X)$, которые представляют s' и s'', причем найдутся такие индексы $\lambda_i \leqslant \lambda$, что сечения пучка $\mathscr{F}_{\lambda_i}$, индуцированные сечениями s'_λ и s''_λ при гомоморфизме $\mathscr{F}_\lambda \to \mathscr{F}_{\lambda_i}$, совпадают на U_i. Заменим λ наименьшим из всех λ_i. Тогда s'_λ и s''_λ будут совпадать на каждом U_i, а следовательно, и на X. Это показывает, что $s' = s''$.

Для того чтобы установить, что рассматриваемое отображение есть отображение *на все* $\mathscr{F}(X)$, применим теорему 3.9.1 к предпучку $\mathscr{F}_0$. Итак, пусть (U_i) — конечное открытое покрытие пространства X и $s_i \in \mathscr{F}_0(U_i)$ — такие элементы, что ограничения элементов s_i и s_j на U_{ij} совпадают. По соображениям конечности, найдутся индекс λ и сечения $s_{i\lambda} \in \mathscr{F}_\lambda(U_i)$, которые представляют s_i. Условия согласованности на пересечении обеспечивают для произвольных i и j существование такого индекса $\lambda_{ij} \leqslant \lambda$, что $s_{i\lambda}$ и $s_{j\lambda}$ определяют на U_{ij} одно и то же сечение пучка $\mathscr{F}_{\lambda_{ij}}$. Заменив λ на наименьший индекс среди всех λ_{ij}, можно считать, что $s_{i\lambda} = s_{j\lambda}$ на U_{ij}, а значит, найдется такое сечение $s_\lambda \in \mathscr{F}_\lambda(X)$, которое индуцирует $s_{i\lambda}$ на U_i. Элемент множества $\mathscr{F}_0(X)$, представленный сечением s_λ, индуцирует, очевидно, s_i на U_i, что и завершает доказательство.

Предыдущая теорема остается справедливой, если X есть пространство Зариского (пространством Зариского называют пространство X, в котором всякая убывающая последовательность замкнутых множеств стабилизируется[1]).) Непосредственно проверяется, что это свойство эквивалентно следующему: *всякое подпространство в X квазикомпактно*, т. е. удовлетворяет аксиоме Бореля — Лебега (достаточно даже того, чтобы всякое *открытое* подмножество в X было квазикомпактным).

Чтобы установить теорему 3.10.1 в случае, когда X — пространство Зариского, заметим сначала, что первая часть доказательства теоремы проходит без изменений, так как X квазикомпактно. Рассмотрим теперь сечение $s \in \mathscr{F}(X)$. Так как

$$\mathscr{F}(x) = \lim_{\lambda} \operatorname{ind} \mathscr{F}_\lambda(x)$$

для любого $x \in X$, то, как легко убедиться с помощью леммы Бореля — Лебега, существуют конечное открытое покрытие $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

[1]) Напомним, что всякое алгебраическое многообразие является неприводимым пространством Зариского (пример 2.1.4). — *Прим. ред.*

пространства X, индексы λ_i и сечения $s_i \in \mathcal{F}_{\lambda_i}(U_i)$, которые „представляют" s на U_i. Положим $V_p = U_1 \cup \ldots \cup U_p$ и построим теперь индукцией по p сечение пучка $\mathcal{F}_\lambda$ над V_p, которое представляет s на V_p. Тем самым теорема будет доказана.

Построение тривиально для $p=1$. Остается сделать переход от p к $p+1$. Пусть t — сечение из $\mathcal{F}_\lambda(V_p)$, которое представляет s на V_p. Так как X есть пространство Зариского, то таким же будет и всякое его подпространство, в частности, и $V_p \cap U_{p+1}$. Таким образом, в силу первой части доказательства каноническое отображение

$$\lim\operatorname{ind}\mathcal{F}_\lambda(V_p \cap U_{p+1}) \to \mathcal{F}(V_p \cap U_{p+1})$$

взаимно однозначно. Следовательно, все сводится к случаю, когда $\lambda = \lambda_{p+1}$ и $t = s_{p+1}$ на $V_p \cap U_{p+1}$, что, очевидно, завершает доказательство.

Из полученного результата вытекает, что *индуктивный предел вялых пучков над пространством Зариского есть вялый пучок.* Действительно, пусть $\mathcal{F}$ — индуктивный предел вялых пучков $\mathcal{F}_\lambda$ и s — произвольное сечение пучка $\mathcal{F}$ над открытым множеством U. Так как U — пространство Зариского, то предыдущий результат показывает, что существуют индекс λ и сечение s_λ пучка $\mathcal{F}_\lambda$ над U, которое представляет s над U. Продолжим s_λ на все X и рассмотрим сечение пучка $\mathcal{F}$, которое индуцировано продолжением сечения s_λ. Ясно, что последнее является продолжением сечения s на все X, что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения показывают, что *индуктивный предел мягких пучков над компактным пространством есть мягкий пучок.*

§ 4. КОГОМОЛОГИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПУЧКЕ

Во всем этом параграфе слово „пучок“ обозначает пучок *абелевых групп*.

4.1. Дифференциальные пучки.

Пусть X — топологическое пространство. *Градуированным пучком* над X называется всякая последовательность $\mathscr{L}^* = (\mathscr{L}^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ пучков над X. Говорят, что $\mathscr{L}^n$ есть компонента степени n в $\mathscr{L}^*$. Если T — функтор, определенный на категории пучков, со значениями в категории абелевых групп (или в любой другой абелевой категории), то через $T(\mathscr{L}^*)$ мы будем постоянно обозначать градуированную группу $(T(\mathscr{L}^n))_{n \in \mathbf{Z}}$. В частности, для любого семейства носителей Φ в X положим

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) = (\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^n))_{n \in \mathbf{Z}}.$$

Заметим, что прямую сумму групп $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^n)$ нельзя, вообще говоря, отождествлять с группой $\Gamma_\Phi(\bigoplus \mathscr{L}^n)$. Поэтому полезно отличать *последовательность* пучков от пучка, являющегося прямой суммой членов этой последовательности.

Пусть $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ — два градуированных пучка над X. *Гомоморфизмом степени* r градуированного пучка $\mathscr{L}^*$ в $\mathscr{M}^*$ называется последовательность $f = (f^n)$ гомоморфизмов пучков $f^n : \mathscr{L}^n \to \mathscr{M}^{n+r}$. Гомоморфизмы степени $r = 0$ будут называться просто *гомоморфизмами градуированного пучка* $\mathscr{L}^*$ *в* $\mathscr{M}^*$. Это определение, очевидно, позволяет говорить об *абелевой категории* градуированных пучков над X.

Градуированный пучок $\mathscr{L}^*$ над X называется *дифференциальным пучком* (или пучком комплексов), если на нем определен гомоморфизм $d : \mathscr{L}^* \to \mathscr{L}^*$ степени r, такой, что $d^2 = 0$. Если не будет оговорено противное, мы всегда будем предполагать $r = +1$, что не ограничивает общности.

Пусть $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ — два дифференциальных пучка. Пучок $\mathscr{M}^*$ называется дифференциальным подпучком пучка $\mathscr{L}^*$, если $\mathscr{M}^n \subset \mathscr{L}^n$ для всех n и дифференциал d на $\mathscr{M}^*$ индуцирован дифференциалом

в $\mathscr{L}^*$. С другой стороны, *гомоморфизмом* дифференциального пучка $\mathscr{L}^*$ в $\mathscr{M}^*$ называется гомоморфизм градуированных пучков, имеющий степень 0, коммутирующий с дифференциалами в $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$. Можно, очевидно, говорить об *абелевой категории* дифференциальных пучков над X.

Пусть $\mathscr{L}^*$ — дифференциальный пучок. Будем всегда полагать

$$\mathcal{Z}^n(\mathscr{L}^*) = \mathcal{Z}^n = \operatorname{Ker}\left(\mathscr{L}^n \xrightarrow{d} \mathscr{L}^{n+1}\right),$$

$$\mathscr{B}^n(\mathscr{L}^*) = \mathscr{B}^n = \operatorname{Im}\left(\mathscr{L}^{n-1} \xrightarrow{d} \mathscr{L}^n\right),$$

$$\mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*) = \mathcal{Z}^n(\mathscr{L}^*)/\mathscr{B}^n(\mathscr{L}^*).$$

Последнее определение имеет смысл в силу равенства $d^2 = 0$. Пучок $\mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*)$ называется *производным пучком* степени n дифференциального пучка $\mathscr{L}^*$.

Пусть T — ковариантный аддитивный функтор, определенный на категории пучков с базой X, и со значениями, например, в категории абелевых групп. Для всякого дифференциального пучка $\mathscr{L}^*$ градуированная группа $T(\mathscr{L}^*)$ каноническим образом снабжена дифференциалом $T(d) = d : T(\mathscr{L}^n) \to T(\mathscr{L}^{n+1})$ (соотношение $T(d)^2 = 0$ выполняется, так как T предполагается *аддитивным*). Таким образом, $T(\mathscr{L}^*)$ является не только градуированной группой, но и *комплексом*. Это имеет место, например, для групп $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)$ и $\mathscr{L}^*(A)$, где A — произвольное подмножество в X. Особенно важен случай, когда T *точен слева*. В этом случае из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{Z}^n \xrightarrow{j} \mathscr{L}^n \xrightarrow{d} \mathscr{L}^{n+1}$$

следует точная последовательность

$$0 \to T(\mathcal{Z}^n) \to T(\mathscr{L}^n) \to T(\mathscr{L}^{n+1}),$$

т. е. *можно каноническим образом отождествить $T(\mathcal{Z}^n)$ с группой коциклов комплекса $T(\mathscr{L}^*)$ степени n*, что мы и будем всегда делать. Наоборот, группу $T(\mathscr{B}^n)$ нельзя отождествить с группой кограниц степени n в $T(\mathscr{L}^*)$. Можно только сказать, что группа $T(\mathscr{B}^n)$ содержится в группе коциклов степени n для $T(\mathscr{L}^*)$.

Если функтор T точен, то положение намного проще. Из точных последовательностей

$$0 \to \mathcal{Z}^n \to \mathscr{L}^n \to \mathscr{B}^{n+1} \to 0$$

$$0 \to \mathscr{B}^n \to \mathcal{Z}^n \to \mathscr{H}^n \to 0$$

вытекают аналогичные точные последовательности для функтора T, так что группа кограниц степени n в $T(\mathscr{L}^*)$ есть не что иное, как $T(\mathscr{B}^n)$, и

$$\boxed{H^n(T(\mathscr{L}^*)) = T(\mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*)), \text{ если } T \text{ точен.}}$$

Например, для всякой точки x из X имеем канонический изоморфизм

$$\boxed{H^n(\mathscr{L}^*(x)) = \mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*)(x),}$$

который в принципе позволяет легко вычислять производные пучки пучка $\mathscr{L}^*$. Их можно вычислить также следующим образом. Ясно, что пучки $\mathscr{Z}^n$ и $\mathscr{B}^n$ порождены предпучками

$$U \to Z^n(\mathscr{L}^*(U)), \quad U \to B^n(\mathscr{L}^*(U)),$$

первый из которых является даже пучком. Отсюда вытекает, что *производный пучок* $\mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*)$ *порожден предпучком*

$$U \to H^n(\mathscr{L}^*(U))$$

(для доказательства этого достаточно заметить, что если имеется точная последовательность предпучков, то пучки, порожденные этими предпучками, снова образуют точную последовательность, так как индуктивный предел точных последовательностей является точной последовательностью).

4.2. Резольвенты пучка.

Пусть задан пучок $\mathscr{A}$ с базой X. *Резольвентой* пучка $\mathscr{A}$ (или, точнее, *когомологической резольвентой* пучка $\mathscr{A}$) называют любую точную последовательность пучков вида

$$0 \to \mathscr{A} \xrightarrow{j} \mathscr{L}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{d} \ldots . \tag{1}$$

Такая резольвента очевидным образом определяет дифференциальный пучок $\mathscr{L}^* = (\mathscr{L}^n)$ с $\mathscr{L}^n = 0$ при $n \leqslant 0$, производные пучки которого равны

$$\mathscr{H}^0(\mathscr{L}^*) = \mathscr{A}, \quad \mathscr{H}^n(\mathscr{L}^*) = 0 \quad \text{для} \quad n \neq 0.$$

Если T — ковариантный аддитивный функтор со значениями в категории абелевых групп, то $T(\mathscr{L}^*)$ является *коцепным комплексом* и имеется канонический гомоморфизм группы $T(\mathscr{A})$ в группу коциклов степени 0 этого комплекса. Если T *точен слева*, то $T(\mathscr{A})$ отождествляется с этой группой, а если T *точен*, то $T(\mathscr{L}^*)$ есть резольвента группы $T(\mathscr{A})$. Например, $\mathscr{L}^*(x)$ для всякого $x \in X$ является резольвентой группы $\mathscr{A}(x)$.

Так как производные пучки пучка $\mathscr{L}^*$ порождаются предпучками $U \to H^n(\mathscr{L}(U))$, то для того, чтобы последовательность (1) была резольвентой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(a) *сечения пучка* $\mathscr{A}$ *отображаются взаимно однозначно в сечения пучка* $\mathscr{L}^0$;

(b) *если s — сечение пучка $\mathscr{L}^0$ над открытым множеством U, то для того, чтобы $ds = 0$, необходимо и достаточно, чтобы s было сечением пучка $\mathscr{A}$;*

(c) *если s — сечение пучка $\mathscr{L}^n$ $(n \geqslant 1)$ над открытым множеством U, то для того, чтобы $ds = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого достаточно малого $V \subset U$ существовало бы такое сечение $s' \in \mathscr{L}^{n-1}(V)$, что $s = ds'$ на V.*

Рассмотрим два пучка $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, гомоморфизм $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, две резольвенты $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ пучков $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ и гомоморфизм дифференциальных пучков $g\colon \mathscr{L}^* \to \mathscr{M}^*$. Мы скажем, что g *совместим с* f, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \xrightarrow{f} & \mathscr{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{L}^* & \xrightarrow{g} & \mathscr{M}^*, \end{array}$$

в которой по вертикали имеем канонические вложения, *коммутативна.*

В заключение приведем примеры резольвент.

Пример 4.2.1. Пусть X — произвольное топологическое пространство, A — абелева группа, которую можно отождествить с простым пучком над X со слоем A. Тогда пучки коцепей Александера — Спаньера над X со значениями в A (пример 2.5.2) образуют резольвенту пучка A.

Пример 4.2.2. Пусть X — дифференцируемое многообразие. Тогда пучки $\mathfrak{Q}^p$ образуют резольвенту простого пучка над X со слоем $\mathbf{R}$ (пример 2.5.1).

Пример 4.2.3. Пусть задана резольвента

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \dots$$

для простого пучка над X со слоем $\mathbf{Z}$ (аддитивная группа целых чисел), и предположим, что пучки $\mathscr{L}^n$ *не имеют кручения* (т. е. абелевы группы $\mathscr{L}^n(x)$ не имеют кручения). Тогда для *всякого* пучка $\mathscr{A}$ над X последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{L}^0 \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{L}^1 \otimes \mathscr{A} \to \dots$$

будет точной, как это видно из рассмотрения слоев над точками. Следовательно, дифференциальный пучок $\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A}$ является резольвентой пучка $\mathscr{A}$.

4.3. Каноническая резольвента пучка.

Пусть $\mathscr{A}$ — пучок с базой X. Обозначим через $\mathscr{C}^0(X; \mathscr{A})$ *пучок ростков не обязательно непрерывных сечений пучка* $\mathscr{A}$. Сечением пучка $\mathscr{C}^0(X; \mathscr{A})$ над открытым множеством U является тогда отображение s множества U в накрывающее пространство $\mathscr{A}$, которое

подчинено единственному условию $p(s(x)) = x$ для всех $x \in U$. Операторы ограничения в $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ определяются очевидным образом

Ясно, что имеется каноническое вложение

$$j : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$$

и что пучок $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ является *вялым пучком* (см. п. 3.1).

Определим теперь пучки $\mathcal{C}^n(X; \mathcal{A})$ следующим образом:

$$\mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A})), \quad \text{где } \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})/\mathcal{A};$$
$$\mathcal{C}^2(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^2(X; \mathcal{A})), \text{ где } \mathcal{Z}^2(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A})/\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A})$$

и т. д. Все эти пучки — вялые.

Имеем, кроме того, гомоморфизмы

$$d : \mathcal{C}^n(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^{n+1}(X; \mathcal{A}),$$

которые получаются композицией эпиморфизма

$$\mathcal{C}^n(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^{n+1}(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^n(X; \mathcal{A})/\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})$$

с вложением

$$\mathcal{Z}^{n+1}(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^{n+1}(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^{n+1}(X; \mathcal{A})).$$

Ясно по самому построению, что мы имеем *точную последовательность*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \dots .$$

Иначе говоря, мы построили каноническим образом *резольвенту пучка $\mathcal{A}$, состоящую из вялых пучков*. Будем обозначать ее через $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$.

Для всякого семейства носителей Φ в X положим

$$\boxed{C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})).}$$

Отображения

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \to C^*_\Phi(X; \mathcal{A})$$

можно рассматривать как ковариантные аддитивные функторы, определенные на категории пучков над X, со значениями: первый — в категории дифференциальных пучков, второй — в категории коцепных комплексов. *Эти функторы точны.*

Действительно, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0.$$

Для всякого открытого множества U из нее, очевидно, получается точная последовательность

$$0 \to \prod_{x \in U} \mathcal{A}'(x) \to \prod_{x \in U} \mathcal{A}(x) \to \prod_{x \in U} \mathcal{A}''(x) \to 0$$

Отсюда следует, что

$$0 \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}') \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}'') \to 0$$

является точной последовательностью предпучков и тем более пучков. Переходя к фактор-пучкам, получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{Z}^1(X;\ \mathcal{A}') \to \mathcal{Z}^1(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^1(X;\ \mathcal{A}'') \to 0.$$

Отсюда по индукции доказывается точность функторов

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}^n(X;\ \mathcal{A}).$$

Точность функторов

$$\mathcal{A} \to C^n_\Phi(X;\ \mathcal{A})$$

вытекает из предыдущего и из теоремы 3.1.3.

Замечание 4.3.1. Обозначим временно через $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)$ каноническую резольвенту пучка $\mathcal{A}$. Покажем, что для всякого $x \in X$ *комплекс с дополнением* $\mathcal{A}^*(x)$ *гомотопно тривиален.*

Полагая $\mathcal{Z}^n = \mathcal{Z}^n(X;\ \mathcal{A})$, достаточно показать (гл. I, теорема 2.4.1), что для всех n группа $\mathcal{Z}^n(x)$ является прямым слагаемым в $\mathcal{C}^n(x)$. Но так как $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{Z}^n)$, то достаточно доказать это для $n = 0$. В этом случае требуемую проекцию группы $\mathcal{A}^0(x)$ на $\mathcal{A}(x)$ можно получить, сопоставляя ростку сечения (не обязательно непрерывного) пучка $\mathcal{A}$ в точке x *значение*, которое оно принимает в x. Тем самым наше утверждение доказано.

Замечание 4.3.2[1]). Для сечений пучков $\mathcal{A}^p = \mathcal{C}^p(X;\ \mathcal{A})$ можно дать явную конструкцию, которая имеет связь с коцепями Александера — Спаньера.

Рассмотрим в X открытое множество U. Сечением пучка $\mathcal{A}^0$ над U является, очевидно, функция

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{A}(x_0),$$

определенная в U, а в остальном произвольная. Так как, с другой стороны,

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}^0/\mathcal{A}),$$

то сечением пучка $\mathcal{A}^1$ над U является функция $f(x_0)$ со значениями в фактор-группах $\mathcal{A}^0(x_0)/\mathcal{A}(x_0)$. Но по предыдущему замечанию группа $\mathcal{A}^0(x)$ есть прямая сумма подгруппы $\mathcal{A}(x)$ и подгруппы $\mathcal{N}^0(x)$, образованной ростками сечений (не непрерывных) пучка $\mathcal{A}$ в точке x, которые в точке x принимают значение 0. Поэтому сечение f пучка $\mathcal{A}^1$ над U можно представить как функцию

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{N}^0(x_0).$$

[1]) Чтение этого замечания не нужно и даже вредно для понимания этого параграфа. Оно требуется только в § 6, где будет играть, впрочем, чисто вспомогательную роль.

Заметим, с другой стороны, что элемент $f(x_0) \in \mathcal{N}^0(x_0)$ представляется (не взаимно однозначным образом) отображением

$$x_1 \to f(x_0,\ x_1) \in \mathcal{A}(x_1),$$

определенным в некоторой открытой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и равным 0 при $x_1 = x_0$. Следовательно, *сечениями пучка $\mathcal{A}^1$ над U являются функции*

$$f(x_0,\ x_1) \in \mathcal{A}(x_1),$$

определенные для

$$x_0 \in U, \quad x_1 \in U(x_0)$$

и такие, что

$$f(x_0,\ x_0) = 0 \quad \textit{для всех} \quad x_0 \in U.$$

При этом две функции f' и f'' определяют одно и то же сечение пучка $\mathcal{A}^1$ над U тогда и только тогда, когда всякий $x_0 \in U$ обладает такой окрестностью $V(x_0)$, что

$$f'(x_0,\ x_1) = f''(x_0,\ x_1) \quad \textit{для} \quad x_1 \in V(x_0).$$

Предыдущая конструкция позволяет также дать явное выражение для оператора $d: \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1$. Действительно, пусть нам задано сечение f пучка $\mathcal{A}^0$ над U, т. е. отображение

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{A}(x_0) \quad (x_0 \in U).$$

Тогда df есть сечение пучка $\mathcal{A}^0 / \mathcal{A}$, полученное из f переходом к фактор-пучку. Если представить df функцией со значениями в группах $\mathcal{N}^0(x_0)$, то будем иметь

$$df(x_0) \equiv \tilde{f}(x_0) \mod \mathcal{A}(x_0),$$

где $\tilde{f}(x_0) \in \mathcal{A}^0(x_0)$ есть росток непрерывного сечения пучка $\mathcal{A}^0$, определенного с помощью f в точке x_0. Представим $df(x_0)$ отображением

$$x_1 \to df(x_0,\ x_1) \in \mathcal{A}(x_1),$$

определенным в окрестности точки x_1. Тогда предыдущее соотношение будет выражать просто то, что сечение пучка $\mathcal{A}$

$$x_1 \to df(x_0,\ x_1) - f(x_1)$$

непрерывно в x_0. Так как $df(x_0,\ x_0) = 0$, то это отображение в окрестности точки x_0 является *непрерывным сечением* пучка $\mathcal{A}$, принимающим в точке x_0 значение $-f(x_0)$. Если мы обозначим через

$$x_1 \to f(x_0)(x_1)$$

какое-нибудь из непрерывных сечений, определенных в $U(x_0)$ и равных $f(x_0)$ при $x_1 = x_0$, то мы получим окончательно формулу

$$df(x_0,\ x_1) = f(x_1) - f(x_0)(x_1),$$

которая имеет место при $x_0 \in U$, $x_1 \in U(x_0)$.

Наконец, так как $\mathcal{A}^1 = \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}^0 / \mathcal{A})$, то то же самое рассуждение, что и выше, показывает, что для любого x группа $\mathcal{A}^1(x)$ разлагается в прямую сумму подгруппы $\mathcal{Z}^1(x) = \mathcal{N}^0(x)$ и подгруппы $\mathcal{N}^1(x)$, образованной ростками сечений (не непрерывных) пучка $\mathcal{Z}^1$, принимающих в точке x значение 0.

Если представить сечение $f(x_0,\ x_1)$ пучка $\mathcal{A}^1$ отображением

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{N}^0(x_0),$$

то ясно, что росток $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^1(x)$, определенный сечением f в точке x, принадлежит $\mathcal{N}^1(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$. Так как $f(x)$ является ростком в точке x сечения (не непрерывного) пучка $\mathcal{A}$, определенного отображением $x_1 \to f(x,\ x_1)$, то мы видим, что соотношение

$$\tilde{f}(x) \in \mathcal{N}^1(x)$$

эквивалентно тому, что $f(x,\ x_1) = 0$, когда x_1 достаточно близка к x.

Прежде чем распространять эти результаты на случай произвольной степени p, заметим, что, полагая $\mathcal{Z}^p = \mathcal{Z}^p(X;\ \mathcal{A}) = \mathcal{A}^{p-1} / \mathcal{Z}^{p-1}$, будем иметь соотношение

$$\mathcal{A}^p = \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{Z}^p),$$

и, следовательно, для всякого x группа $\mathcal{A}^p(x)$ представляется в виде прямой суммы подгруппы $\mathcal{Z}^p(x) = \mathcal{A}^{p-1}(x) / \mathcal{Z}^{p-1}(x)$ и подгруппы $\mathcal{N}^p(x)$, образованной ростками не непрерывных сечений пучка $\mathcal{Z}^p$, которые принимают значение 0 в точке x. Теперь можно сформулировать следующие утверждения, которые будут доказываться индукцией по p.

(a_p) *Всякое сечение пучка $\mathcal{A}^p$ над открытым множеством U можно задать функцией $f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$, равной 0 при $x_0 = x_1$ и определенной на множестве вида*

$$x_0 \in U;\ x_1 \in U(x_0);\ \ldots;\ x_p \in U(x_0,\ \ldots,\ x_{p-1}), \tag{1}$$

где через $U(x_0,\ \ldots,\ x_i)$ обозначено открытое множество, содержащее x_i и зависящее от $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_i$. Кроме того, две функции f' и f'' определяют одно и то же сечение пучка $\mathcal{A}^p$ тогда и только тогда, когда они совпадают на некотором множестве вида (1).

(b_p) *Гомоморфизм $d: \mathcal{A}^{p-1} \to \mathcal{A}^p$ задается формулой*

$$df(x_0,\ \ldots,\ x_p) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i f(x_0,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_p) + \\ + (-1)^p f(x_0,\ \ldots,\ x_{p-1})(x_p), \tag{2}$$

где через $f(x_0,\ \ldots,\ x_{p-1})(x_p)$ обозначено значение в точке x_p некоторого непрерывного сечения пучка $\mathcal{A}$ над $U(x_0,\ \ldots,\ x_{p-1})$, которое равно $f(x_0,\ \ldots,\ x_{p-1})$ при $x_p = x_{p-1}$.

(c_p) *Пусть f — сечение пучка $\mathcal{A}^p$ в окрестности точки x, представленное функцией $f(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$. Для того*

чтобы росток $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^p(x)$, *определяемый сечением* f *в* x, *принадлежал подгруппе* $\mathcal{N}^p(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x, x_1, \ldots, x_p) = 0 \tag{3}$$

на множестве вида

$$x_1 \in U, \ x_2 \in U(x_1), \ \ldots, \ x_p \in U(x_1, \ldots, x_{p-1}),$$

где U — *окрестность точки* x.

Нам достаточно доказать, что если эти утверждения верны для $p-1$, то они верны и для p. Докажем сначала (a_p). Пусть f — сечение пучка $\mathcal{A}^p$ над U, т. е. не непрерывное сечение пучка $\mathcal{Z}^p$ над U. В силу канонического изоморфизма $\mathcal{Z}^p(x) = \mathcal{N}^{p-1}(x)$, сечение f можно представить отображением

$$x_0 \to f(x_0) \in \mathcal{N}^{p-1}(x_0) \quad (x_0 \in U).$$

Но по предположению (a_{p-1}), $f(x_0)$ представимо отображением

$$(x_1, \ldots, x_p) \to f(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p),$$

определенным для $x_1 \in U(x_0), \ldots, x_p \in U(x_0, \ldots, x_{p-1})$, которое можно считать равным 0 при $x_1 = x_0$, так как $f(x_0) \in \mathcal{N}^{p-1}(x_0)$. Отсюда сразу следует утверждение (a_p).

Пусть теперь f — сечение пучка $\mathcal{A}^{p-1}$, представленное функцией

$$f(x_0, \ldots, x_{p-1}).$$

Вычислим функцию $df(x_0, \ldots, x_p)$, которая представляет сечение df пучка $\mathcal{A}^p$. Если представить df отображением $x \to df(x) \in \mathcal{N}^{p-1}(x)$, то, очевидно, будем иметь соотношение

$$df(x_0) \equiv \tilde{f}(x_0) \mod \mathcal{Z}^{p-1}(x_0),$$

где $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^{p-1}(x)$ есть росток сечения пучка $\mathcal{A}^{p-1}$, определенный с помощью f в точке x. Но по свойству точности имеем

$$\mathcal{Z}^{p-1}(x) = d(\mathcal{N}^{p-2}(x)),$$

так что найдется росток

$$\tilde{g}(x_0) \in \mathcal{N}^{p-2}(x_0),$$

такой, что

$$df(x_0) = \tilde{f}(x_0) + d\tilde{g}(x_0).$$

Если представить $\tilde{g}(x_0)$ функцией $g(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$, определенной для $x_1 \in U(x_0)$ и т. д., то утверждения (a_{p-1}) и (b_{p-1}) покажут, что предыдущее соотношение можно записать в виде

$$df(x_0, \ldots, x_{p-1}) = f(x_1, \ldots, x_p) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i+1} g(x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) + (-1)^{p+1} g(x_0, \ldots, x_{p-1})(x_p).$$

причем это равенство имеет место на множестве обычного вида. Мы выведем отсюда утверждение (b_p).

Согласно (c_{p-2}), можно предполагать, что $g(x_0, x_1, \ldots, x_{p-2}) = 0$, как только $x_0 = x_1$. Это же верно и для $df(x_0, \ldots, x_p)$ в силу утверждения (a_p), которое мы уже доказали. В предыдущей формуле положим $x_0 = x_1$, что даст соотношение

$$0 = f(x_0, x_2, \ldots, x_p) + g(x_0, x_2, \ldots, x_p),$$

имеющее место на множестве вида $x_2 \in U(x_0), \ldots$. Выражая g из этого соотношения и подставляя результат в формулу для df, мы получим утверждение (b_p).

Рассмотрим, наконец, росток $\tilde{f}(x) \in \mathcal{A}^p(x)$, определяемый сечением f пучка $\mathcal{A}^p$ в окрестности точки x. Представим f функцией $f(x_0) \in \mathcal{N}^{p-1}(x)$. Тогда соотношение $\tilde{f}(x) \in \mathcal{N}^{p-1}(x)$ будет эквивалентно соотношению $f(x) = 0$. Но так как росток $f(x) \in \mathcal{A}^{p-1}(x)$ определен функцией $f(x, x_0, \ldots, x_{p-1})$ переменных $x_0, \ldots, x_{p-1}$, то утверждение (c_p) есть следствие утверждения (c_{p-1}).

Отметим аналогию, существующую между формулой (2) и формулой, дающей дифференциал коцепи Александера — Спаньера (пример 2.5.2). Существенным отличием от классической ситуации является условие

$$f(x_0, x_0, x_2, \ldots, x_p) = 0,$$

налагаемое на коцепи, рассматриваемые здесь. Позднее (п. 6.4) мы покажем, что если убрать это условие, то мы получим другую резольвенту пучка $\mathcal{A}$, состоящую из вялых пучков, которая к тому же обладает естественной „полусимплициальной структурой“, чего нет в случае канонической резольвенты.

4.4. Когомологии со значениями в пучке.

Пусть заданы пространство X, семейство носителей Φ в X и пучок $\mathcal{A}$ с базой X. Положим

$$\boxed{H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}) = H^n\left(C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A})\right)^{1)}.}$$

Если имеется гомоморфизм $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, то он очевидным образом индуцирует гомоморфизмы

$$f^*: H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X;\ \mathcal{B}).$$

[1]) Эти группы называются *группами когомологий пространства X со значениями в пучке $\mathcal{A}$ и с носителями из семейства Φ*. — *Прим. ред.*

Теорема 4.4.1. *Функторы* $\mathcal{A} \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A})$ *и* $\mathcal{A} \to H^0_\Phi(X; \mathcal{A})$ *изоморфны.*

Действительно, из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A})$$

и из того, что функтор Γ_Φ точен слева, вытекает точная последовательность

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \xrightarrow{j} C^0_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} C^1_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

Теорема 4.4.2. *Всякой точной последовательности пучков*

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{j} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}'' \to 0$$

соответствует точная последовательность когомологий вида

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}') \xrightarrow{j^*} \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \xrightarrow{p^*} \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^1_\Phi(X; \mathcal{A}') \xrightarrow{j^*} \dots .$$

Кроме того, если имеем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{A}' & \to & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{B}' & \to & \mathcal{B} & \to & \mathcal{B}'' & \to & 0, \end{array}$$

то диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^n_\Phi(X; \mathcal{A}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X; \mathcal{B}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{B}') \end{array}$$

коммутативны.

Точная последовательность когомологий получается из точной последовательности комплексов

$$0 \to C^*_\Phi(X; \mathcal{A}') \to C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(X; \mathcal{A}'') \to 0.$$

Вторая часть теоремы получается, если написать коммутативную диаграмму комплексов, соответствующую заданной диаграмме.

Следствие. *Пусть* $0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$ — *точная последовательность пучков с базой* X. *Для того чтобы соответствующая последовательность*

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}') \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') \to 0$$

была точной, достаточно, чтобы $H^1_\Phi(X; \mathcal{A}') = 0$.

Теорема 4.4.3. *Пусть* X — *топологическое пространство,* Φ — *семейство носителей в* X *и* $\mathcal{A}$ — *пучок над* X. *Тогда*

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 1$$

в следующих двух случаях:

(а) *пучок* $\mathcal{A}$ — *вялый;*

(b) *семейство Φ — паракомпактифицирующее и $\mathcal{A}$ — Φ-мягкий пучок.*

Действительно, напишем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^1(X;\ \mathcal{A}) \to \ldots .$$

В случае (a) *все* пучки, участвующие в ней, вялые и можно применить теорему 3.1.3. В случае (b) *все* пучки являются Φ-мягкими и можно применить теорему 3.5.4, что и доказывает теорему.

Отметим еще следующий результат, который нам будет полезен в § 5.

Теорема 4.4.4. *Пусть $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ — локально конечное семейство пучков с базой X, $\mathcal{F}$ — прямое произведение пучков $\mathcal{F}_i$. Тогда имеем канонические изоморфизмы*

$$H^n(X;\ \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} H^n(X;\ \mathcal{F}_i).$$

Достаточно показать, что имеются канонические изоморфизмы

$$\mathcal{C}^n(X;\ \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{C}^n(X;\ \mathcal{F}_i).$$

Действительно, в силу определения прямого произведения (п. 2.6) мы будем иметь тогда

$$\Gamma(\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{F})) = \prod_{i \in I} \Gamma(\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{F}_i))$$

и теорема будет следовать из того, что гомологии прямого произведения какого-либо семейства комплексов совпадают с прямым произведением гомологий сомножителей.

Установим сначала требуемый изоморфизм для $n = 0$. Если U — открытое множество, то имеем

$$\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}(x).$$

Но так как заданное семейство локально конечно, то

$$\mathcal{F}(x) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(x)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(x) = \prod_{i \in I} \prod_{x \in U} \mathcal{F}_i(x) = \\ = \prod_{i \in I} \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{F}_i)(U),$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что пучки $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{F}_i)$ также образуют локально конечное семейство. Следовательно, используя предыдущий результат и составляя прямое произведение точных последовательностей

$$0 \to \mathcal{F}_i \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{F}_i) \to \mathcal{Z}^1(X;\ \mathcal{F}_i) \to 0,$$

мы получим канонический изоморфизм

$$\mathcal{Z}^1(X;\ \mathcal{F}) = \coprod_{i \in I} \mathcal{Z}^1(X;\ \mathcal{F}_i).$$

Так как мы имеем здесь дело с локально конечным произведением, то, применяя результат, относящийся к функтору $\mathcal{C}^0$, к этой формуле, получим канонический изоморфизм

$$\mathcal{C}^1(X;\ \mathcal{F}) = \coprod_{i \in I} \mathcal{C}^1(X;\ \mathcal{F}_i).$$

Продолжая дальше и применяя индукцию по n, мы, очевидно, получим требуемый результат.

4.5. Спектральные последовательности, связанные с дифференциальным пучком.

Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X, $\mathcal{L}^*$ — дифференциальный пучок над X. Рассмотрим биградуированную группу

$$K = K(\mathcal{L}^*) = C^*_\Phi(X;\ \mathcal{L}^*) = \sum_{p,\ q} C^p_\Phi(X;\ \mathcal{L}^q).$$

Ее можно рассматривать как *двойной комплекс*, если дифференциал

$$d' : C^p_\Phi(X;\ \mathcal{L}^q) \to C^{p+1}_\Phi(X;\ \mathcal{L}^q)$$

определить как дифференциал в комплексе $C^*_\Phi(X;\ \mathcal{L}^q)$, а дифференциал

$$d'' : C^p_\Phi(X;\ \mathcal{L}^q) \to C^p_\Phi(X;\ \mathcal{L}^{q+1})$$

определить как гомоморфизм, с точностью до знака $(-1)^p$ индуцированный дифференциалом $\mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^{q+1}$ в $\mathcal{L}^*$. В этом случае будет выполнено соотношение $d'd'' + d''d' = 0$, и в K можно определить полный дифференциал $d = d' + d''$. Разумеется, K можно рассматривать как простой комплекс относительно d и градуировки с помощью подгрупп

$$K^n = \sum_{p+q=n} C^p_\Phi(X;\ \mathcal{L}^q).$$

Мы сейчас вычислим обе спектральные последовательности комплекса K (гл. I, п. 4.8) или по крайней мере их первые члены.

Известно, что в первой спектральной последовательности имеем

$$'E_2^{pq} = {}'H^p({}''H^q(K)),$$

где $''H^q(K)$ есть d''-когомологии степени q комплекса K, снабженного второй градуировкой, и где $'H^p({}''H^q(K))$ — d'-когомологии сте-

пени p комплекса $''H^q(K)$, снабженного градуировкой, которая индуцирована первой градуировкой комплекса K, и дифференциалом, который индуцирован дифференциалом d'.

Следовательно, чтобы получить члены степени p в $''H^q(K)$, нужно вычислить когомологии степени q комплекса

$$C^p_\Phi(X;\ \mathscr{L}^*) = \sum_q C^p_\Phi(X;\ \mathscr{L}^q),$$

снабженного дифференциалом, который индуцирован с точностью до знака $(-1)^p$ дифференциалом в $\mathscr{L}^*$. Так как функтор $\mathscr{A} \to C^p_\Phi(X;\ \mathscr{A})$ *точен*, то, как показано в конце п. 4.1, имеется канонический изоморфизм когомологий рассматриваемого комплекса на группу $C^p_\Phi(X;\ \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*))$. Иными словами, имеет место формула

$$'E_1^{pq} = C^p_\Phi(X;\ \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)).$$

При этом дифференциал d_1 индуцирован дифференциалом d' и, следовательно,

$$\boxed{'E_2^{pq} = H^p_\Phi(X;\ \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)).} \tag{1}$$

Точно так же имеем $''E_2^{pq} = {}''H^p({}'H^q(K))$, где $'H^q(K)$ — d'-когомологии комплекса K, снабженного первой градуировкой. В нашем случае членом степени p этой группы когомологии является $H^q_\Phi(X;\ \mathscr{L}^p)$, т. е.

$$''E_1^{pq} = H^q_\Phi(X;\ \mathscr{L}^p).$$

Чтобы вычислить член E_2, образуем комплекс

$$H^q_\Phi(X;\ \mathscr{L}^*) = \sum_p H^q_\Phi(X;\ \mathscr{L}^p),$$

снабженный дифференциалом, который индуцирован дифференциалом в $\mathscr{L}^*$ (с точностью до знака). Окончательно получаем

$$\boxed{''E_2^{pq} = H^p\big(H^q_\Phi(X;\mathscr{L}^*)\big).} \tag{2}$$

Эти формулы являются основными.

Заметим, что *вторая фильтрация комплекса K всегда регулярна, а первая фильтрация регулярна, если*

$$\mathscr{L}^n = 0 \quad \text{для} \quad n < n_0. \tag{3}$$

Заметим также, что

$$\boxed{''E_2^{p0} = H^p\big(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)\big).} \tag{4}$$

Отсюда получается канонический гомоморфизм

$$H^p(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) \to H^p(K), \tag{5}$$

существующий в силу того, что первая градуировка в K положительна. Согласно общей теории спектральных последовательностей (глава I, п. 4.8), гомоморфизм (5) можно также получить следующим образом. В двойном комплексе $C_\Phi^*(X; \mathscr{L}^*)$ элементы первой степени 0, аннулируемые дифференциалом d', образуют подкомплекс относительно второй градуировки и d''. Обозначим его через $'Z^{0*}$. Каноническое вложение $'Z^{0*} \to K$ индуцирует гомоморфизмы $''H^p('Z^{0*}) \to H^p(K)$, которые совпадают с гомоморфизмами $''E_2^{p0} \to \to H^p(K)$. В нашем случае $'Z^{0*}$ отождествляется с $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)$ при помощи вложения $\Gamma_\Phi(\mathscr{A}) \to C_\Phi^0(X; \mathscr{A})$, имеющего место для любого пучка $\mathscr{A}$. Таким образом, мы видим, что *гомоморфизмы* (5) *индуцированы гомоморфизмом комплексов*

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \to K. \tag{6}$$

4.6. Основные теоремы.

Рассмотрим вновь гомоморфизмы (5). Если $''E_2^{pq} = 0$ при $q \geqslant 1$, то эти гомоморфизмы будут изоморфизмами, так как вторая фильтрация комплекса K регулярна. Поэтому из рассмотрения первой спектральной последовательности получается следующий результат.

Теорема 4.6.1. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X и $\mathscr{L}^*$ — дифференциальный пучок над X. Предположим, что комплексы $H_\Phi^q(X; \mathscr{L}^*)$ ацикличны во всех степенях для $q \geqslant 1$. Тогда существует спектральная последовательность со вторым членом*

$$E_2^{pq} = H_\Phi^p(X; \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)),$$

у которой член E_∞ есть градуированная группа, связанная с когомологиями комплекса $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)$, снабженными подходящей фильтрацией.

Рассмотрим теперь гомоморфизм дифференциальных пучков

$$f : \mathscr{L}^* \to \mathscr{M}^*.$$

Он порождает гомоморфизм двойных комплексов

$$C_\Phi^*(X; \mathscr{L}^*) \to C_\Phi^*(X; \mathscr{M}^*)$$

и гомоморфизмы соответствующих спектральных последовательностей. Впрочем, эти гомоморфизмы естественным образом получаются из гомоморфизма f, если использовать формулы предыдущего пункта. Известно (гл. I, теорема 4.3.1), что если гомоморфизм $'E_2 \to 'E_2$, индуцированный отображением f, является изоморфизмом и первые фильтрации регулярны, то гомоморфизм, отображающий когомологии

первого комплекса в когомологии второго комплекса, индуцированный гомоморфизмом f, также является изоморфизмом. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 4.6.2. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X и $f: \mathscr{L}^* \to \mathscr{M}^*$ — гомоморфизм дифференциальных пучков с базой X. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(a) *гомоморфизмы $\mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*) \to \mathscr{H}^q(\mathscr{M}^*)$, индуцированные гомоморфизмом f, являются изоморфизмами;*

(b) *для всех $q \geqslant 1$ комплексы $H^q_\Phi(X; \mathscr{L}^*)$ и $H^q_\Phi(X; \mathscr{M}^*)$ ацикличны во всех степенях;*

(c) *градуировки пучков $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ ограничены снизу.*

Тогда гомоморфизмы

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) \to H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{M}^*)),$$

индуцированные отображением f, являются изоморфизмами.

Заметим, что условие (b) всегда выполнено по теореме 4.4.3 в следующих двух случаях:

(b′) пучки $\mathscr{L}^n, \mathscr{M}^n$ — вялые (при всех n),

(b″) семейство Φ — паракомпактифицирующее и пучки $\mathscr{L}^n, \mathscr{M}^n$ — Φ-мягкие (при всех n).

Что касается условия (c), то мы покажем в п. 4.13, что его можно снять, если пространство X имеет „конечную размерность" в том смысле, что найдется такое целое n, что $H^p_\Phi(X; \mathscr{A}) = 0$ для всех $p > n$ и для *всякого* пучка $\mathscr{A}$ над X.

4.7. Приложение к резольвентам.

Пусть

$$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \ldots$$

— резольвента пучка $\mathscr{A}$. Применим предыдущие вычисления к двойному комплексу

$$K(\mathscr{L}^*) = C^*_\Phi(X; \mathscr{L}^*) = \sum_{\substack{p \geqslant 0 \\ q \geqslant 0}} C^p_\Phi(X; \mathscr{L}^q).$$

Заметим, что в этом случае имеются два важных гомоморфизма, которые являются мономорфизмами:

$$C^*_\Phi(X; \mathscr{A}) \xrightarrow{j''} C^*_\Phi(X; \mathscr{L}^*) \xleftarrow{j'} \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*). \qquad (1)$$

При этом образ мономорфизма j'' состоит, очевидно, из элементов второй степени 0, которые аннулируются дифференциалом d'', а $\mathrm{Im}(j')$ состоит из элементов первой степени 0, аннулируемых диф-

ференциалом d'. Отсюда вытекает, что соответствующие гомоморфизмы

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''^*} H^n(K) \xleftarrow{j'^*} H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \tag{2}$$

отождествляются с гомоморфизмами

$$'E_2^{n0} \to H^n(K) \leftarrow {}''E_2^{n0},$$

которые определены для любого двойного комплекса с *положительными* градуировками, если отождествить $\mathcal{A}$ с $\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^*)$ и использовать формулу из п. 4.5.

Заметим, что в данном случае группы

$$'E_2^{pq} = H^p_\Phi(X; \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*))$$

равны 0 для $q \geqslant 1$ и, следовательно, *гомоморфизмы*

$$j''^* : H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \to H^n(K)$$

являются изоморфизмами. Поэтому из j'^* получаются *канонические гомоморфизмы*

$$\boxed{H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{A}),} \tag{3}$$

которые определены для любой резольвенты $\mathcal{L}^*$ пучка $\mathcal{A}$.

Разумеется, в действительности получается значительно более полный результат: *существует спектральная последовательность, для которой*

$$E_2^{pq} = H^p\left(H^q_\Phi(X; \mathcal{L}^*)\right)$$

и в которой член E_∞ есть градуированная группа, связанная с подходящим образом фильтрованной группой $H^*_\Phi(X; \mathcal{A})$.

Укажем коротко, как можно получить гомоморфизмы (3) при помощи элементарных рассуждений. Положим

$$\mathcal{Z}^q = \operatorname{Ker}\left(\mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^{q+1}\right).$$

Тогда точные последовательности

$$0 \to \mathcal{Z}^q \to \mathcal{L}^q \to \mathcal{Z}^{q+1} \to 0$$

и теорема 4.4.2 приводят к гомоморфизмам

$$\delta : H^p_\Phi\left(X; \mathcal{Z}^{q-1}\right) \to H^{p+1}_\Phi\left(X; \mathcal{Z}^q\right). \tag{4}$$

Получаем последовательность гомоморфизмов

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^n) = H^0_\Phi(X; \mathcal{Z}^n) \to H^1_\Phi\left(X; \mathcal{Z}^{n-1}\right) \to H^2_\Phi\left(X; \mathcal{Z}^{n-2}\right) \to \dots$$
$$\dots \to H^n_\Phi\left(X; \mathcal{Z}^0\right) = H^n_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

Композиция этих гомоморфизмов дает гомоморфизм $\Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^n) \to \to H^n_\Phi(X; \mathcal{A})$, который вместе с эпиморфизмом $\Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^n) \to H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*))$ и определяет гомоморфизм (3).

Изучим теперь основные свойства гомоморфизмов (3). Прежде всего очевидно следующее свойство.

Теорема 4.7.1. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X, $\mathcal{L}^*$ — резольвента пучка $\mathcal{A}$. Канонические гомоморфизмы*

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{A})$$

являются изоморфизмами в следующих двух случаях:

(a) *пучки $\mathcal{L}^q$ — вялые при всех q;*

(b) *семейство Φ — паракомпактифицирующее и пучки $\mathcal{L}^q$ — Φ-мягкие для всех q.*

Вообще эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если $H^p(H^q_\Phi(X; \mathcal{L}^*)) = 0$ для всех $q \geqslant 1$ и $p \geqslant 0$.

Пример 4.7.1. Пусть X — топологическое пространство, Φ — *паракомпактифицирующее* семейство в X, A — абелева группа. Коцепи Александера — Спаньера пространства X со значениями в A образуют *резольвенту* $\mathcal{F}^*(X; A)$ простого пучка A, состоящую из Φ-*мягких* пучков. Следовательно, *группы* $H^n_\Phi(X; A)$ *можно вычислять при помощи сечений с носителями в Φ дифференциального пучка* $\mathcal{F}^*(X; A)$ (точное определение этих сечений см. в примере 3.9.2).

Пример 4.7.2. Пусть Φ — *паракомпактифицирующее* семейство. Рассмотрим резольвенту

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \ldots$$

пучка $\mathbf{Z}$, состоящую из Φ-*тонких пучков без кручения*. Тогда для любого пучка $\mathcal{A}$ дифференциальный пучок $\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A}$ является *резольвентой* пучка $\mathcal{A}$, состоящей из Φ-*мягких* пучков (теорема 3.7.3). Следовательно, имеем канонические изоморфизмы

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A})).$$

Пример 4.7.3. Пусть X — *дифференцируемое многообразие*. Существует резольвента простого пучка $\mathbf{R}$ на X, образованная пучками Ω^p ростков дифференциальных форм. Эти пучки являются Φ-мягкими для всякого паракомпактифицирующего семейства Φ. Таким образом, группы $H^p_\Phi(X; \mathbf{R})$ *можно вычислять при помощи*

комплекса дифференциальных форм на X с носителями[1]) *в* Φ (теорема де Рама). Вместо дифференциальных форм можно было бы использовать *потоки*. Итак, мы видим, что если X паракомпактно, то следующие свойства эквивалентны для любого целого p:

(a) Всякая *замкнутая* дифференциальная форма степени p ($d\omega = 0$) в X есть *точный дифференциал* ($\omega = d\bar{\omega}$).

(b) вещественные когомологии степени p многообразия X равны 0.

Таким образом, ответ на вопрос, разрешимо ли уравнение $\omega = d\bar{\omega}$ при $d\omega = 0$, зависит исключительно от *топологического* строения многообразия X. Во втором томе этой книги будет произведено более детальное изучение дифференциальных форм в связи с сингулярными когомологиями. Здесь же мы привели только самый элементарный результат.

Продолжим общее изучение гомоморфизмов (3).

Теорема 4.7.2. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X, $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{M}^*$ — резольвенты пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Пусть задан гомоморфизм $g: \mathcal{L}^* \to \mathcal{M}^*$, индуцирующий гомоморфизм $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Тогда диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) & \xrightarrow{g^*} & H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{M}^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) & \xrightarrow{f^*} & H^n_\Phi(X; \mathcal{B}) \end{array}$$

коммутативны.

Доказательство следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{L}^*) & \leftarrow & \Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^*_\Phi(X; \mathcal{B}) & \to & C^*_\Phi(X; \mathcal{M}^*) & \leftarrow & \Gamma_\Phi(\mathcal{M}^*). \end{array}$$

Пример 4.7.4. Пусть Φ — паракомпактифицирующее семейство и $\mathcal{L}^*$ — резольвента пучка $\mathbf{Z}$, образованная Φ-тонкими пучками без кручения. Тогда, пользуясь указанными выше (пример 4.7.2) отождествлениями, можно вычислить гомоморфизм

$$f^*: H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{B}),$$

рассматривая гомоморфизм $1 \otimes f: \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{B}$ и гомоморфизмы

$$H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{A})) \to H^n(\Gamma\ (\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{B})),$$

которые получаются из него очевидным образом.

[1]) Пусть ω — дифференциальная форма степени p на X. Носитель формы ω как носитель сечения пучка Ω^p есть наименьшее *замкнутое* множество $|\omega|$, такое, что ω индуцирует на $X \setminus |\omega|$ нулевое сечение пучка Ω^p, т. е. такое, что ограничение дифференциальной формы ω на $X \setminus |\omega|$ равно 0. Это определение носителя дифференциальной формы совпадает с обычным.

Наконец, операторы δ, связанные с точными последовательностями пучков, также могут быть вычислены с помощью резольвент.

Теорема 4.7.3. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X и $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}''$ — резольвенты пучков $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}''$. Предположим, что имеется коммутативная диаграмма точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{A}' & \to & \mathscr{A} & \to & \mathscr{A}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathscr{L}' & \to & \mathscr{L} & \to & \mathscr{L}'' & \to & 0, \end{array}$$

и, наконец, предположим, что последовательность

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}') \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}'') \to 0$$

точна (это условие всегда выполняется, если рассматриваемые резольвенты состоят из вялых или Φ-мягких пучков[1])). Тогда диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^n(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}'')) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X; \mathscr{A}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X; \mathscr{A}') \end{array}$$

коммутативны.

Чтобы увидеть это, достаточно написать следующую коммутативную диаграмму, состоящую из точных последовательностей, и перейти к соответствующим точным последовательностям когомологий:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C^*_\Phi(X; \mathscr{A}') & \to & C^*_\Phi(X; \mathscr{A}) & \to & C^*_\Phi(X; \mathscr{A}'') & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C^*_\Phi(X; \mathscr{L}') & \to & C^*_\Phi(X; \mathscr{L}) & \to & C^*_\Phi(X; \mathscr{L}'') & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \Gamma_\Phi(\mathscr{L}') & \to & \Gamma_\Phi(\mathscr{L}) & \to & \Gamma_\Phi(\mathscr{L}'') & \to & 0. \end{array}$$

Пример 4.7.5. Пусть $\mathscr{L}^*$ — резольвента пучка $\mathbf{Z}$, образованная Φ-тонкими пучками без кручения[2]). Тогда точная последовательность когомологий может быть получена из точной последовательности комплексов

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A}') \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A}) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^* \otimes \mathscr{A}'') \to 0$$

при помощи отождествлений, сделанных в примере 4.7.2.

[1]) В последнем случае нужно еще, чтобы семейство Φ было паракомпактифицирующим. — *Прим. ред.*

[2]) Нужно предположить также, что Φ — паракомпактифицирующее семейство. — *Прим. ред.*

4.8. Аксиоматическая характеристика групп когомологий.

Пусть X — топологическое пространство и Φ — семейство носителей в X. Мы покажем вкратце, не входя в утомительные, но в общем тривиальные подробности, как свойства функторов $H^n_\Phi(X; \mathcal{A})$, изложенные в п. 4.4, позволяют *охарактеризовать* эти функторы с точностью до изоморфизма.

Действительно, предположим, что заданы два ковариантных аддитивных функтора

$$\mathcal{A} \to {}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \quad \text{и} \quad \mathcal{A} \to {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

со значениями в категории абелевых групп, удовлетворяющие условиям п. 4.4, а именно:

(I) *имеются изоморфизмы функторов*

$$j' : \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to {}'H^0_\Phi(X; \mathcal{A}),$$

$$j'' : \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to {}''H^0_\Phi(X; \mathcal{A});$$

(II) *всякой точной последовательности*

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{f} \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{A}'' \to 0$$

сопоставлены гомоморфизмы

$$\delta' : {}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}'') \to {}'H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}'),$$

$$\delta'' : {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}'') \to {}''H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}'),$$

функторно зависящие от f и g, и точные последовательности

$$\ldots \to {}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{g^*} {}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta'} {}'H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}') \xrightarrow{f^*}$$
$$\xrightarrow{f^*} {}'H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}) \to \ldots$$

$$\ldots \to {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{g^*} {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta''} {}''H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}') \xrightarrow{f^*}$$
$$\xrightarrow{f^*} {}''H^{n+1}_\Phi(X; \mathcal{A}) \to \ldots;$$

(III) $${}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = 0 \quad \textit{при} \quad n \geqslant 1,$$

если $\mathcal{A}$ — вялый пучок.

Мы покажем сейчас, что при этих условиях существуют *изоморфизмы функторов*

$$T^n : {}'H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) \to {}''H^n_\Phi(X; \mathcal{A}),$$

совместимые с операторами δ' и δ''.

Прежде всего условие (I) сразу же дает изоморфизм

$$T^0 : {}'H^0_\Phi \to {}''H^0_\Phi.$$

Рассуждая по индукции, предположим, что T^{n-1} уже определен, и покажем, как определить T^n.

Для этого рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}) \to 0. \tag{1}$$

В силу условия (II) эта последовательность дает две точные последовательности когомологий. Рассмотрим теперь два случая.

Если $n=1$, то в силу аксиом (I) и (III) получим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0_\Phi(X; \mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & Z^1_\Phi(X; \mathcal{A}) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d] & {'H^1_\Phi(X; \mathcal{A})} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \arrow[r] & C^0_\Phi(X; \mathcal{A}) \arrow[r] & Z^1_\Phi(X; \mathcal{A}) \arrow[r, "\delta''"] & {''H^1_\Phi(X; \mathcal{A})} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

в которой три вертикальные стрелки обозначают тождественный изоморфизм, полученный посредством изоморфизма T^0 (мы положили

$$Z^1_\Phi(X; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}))).$$

Отсюда вытекает, что существует, и притом единственный, изоморфизм функторов

$$T^1 : {'H^1_\Phi} \to {''H^1_\Phi},$$

который сохраняет предыдущую диаграмму коммутативной.

Предположим теперь, что $n > 1$. Тогда из точных последовательностей когомологий (1), принимая во внимание условие (III), получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {'H^{n-1}_\Phi(X; \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}))} \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "T^{n-1}"] & {'H^n_\Phi(X; \mathcal{A})} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {''H^{n-1}_\Phi(X; \mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}))} \arrow[r, "\delta''"] & {''H^n_\Phi(X; \mathcal{A})} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

в которой строки точны. Отсюда следует существование единственного изоморфизма функторов

$$T^n : {'H^n_\Phi} \to {''H^n_\Phi},$$

превращающего эту диаграмму в коммутативную.

Остается только проверить, что таким образом построенные естественные преобразования удовлетворяют всем поставленным условиям. Мы предоставляем сделать это читателю.

П р и м е р 4.8.1. Мы используем сейчас предыдущий результат для решения следующей задачи.

Как мы уже видели, со всякой резольвентой $\mathcal{L}^*$ пучка $\mathcal{A}$ связан канонический гомоморфизм

$$H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^*_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

Если применить этот результат к *канонической* резольвенте $\mathscr{L}^* = \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A})$, то получим (так как это вялая резольвента) изоморфизм

$$T(\mathscr{A}) : H^*_\Phi(X; \mathscr{A}) \to H^*_\Phi(X; \mathscr{A}).$$

Совсем не очевидно a priori, что этот изоморфизм тождественен. Однако мы покажем, что на самом деле это так.

Действительно, в силу общих теорем п. 4.7 T на самом деле есть изоморфизм *функторов*, совместимый с операторами δ точных последовательностей когомологий. Поэтому, чтобы доказать, что T тождественен, достаточно доказать это *для когомологий степени* 0, последнее же очевидно.

Мы предоставляем читателю непосредственное рассуждение относительно двойного комплекса

$$C^*_\Phi(X; \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A})).$$

Прямое доказательство получается из рассмотрения дифференциального пучка $\mathscr{C}^*(X; \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A}))$, снабженного своим дифференциалом и полной градуировкой.

4.9. Когомологии локально замкнутого подпространства.

Пусть X — пространство, A — локально замкнутое подпространство в X и $\mathscr{L}$ — пучок с базой X. Если Φ — семейство носителей в A, то положим для краткости

$$H^n_\Phi(A; \mathscr{L}) = H^n_\Phi(A; \mathscr{L} \mid A).$$

Если элементы семейства Φ *замкнуты в* X, то Φ можно рассматривать также как семейство носителей в X и можно определить группы $H^n_\Phi(X; \mathscr{L})$.

Пучок $\mathscr{L}$ с базой X мы будем называть *локально сконцентрированным на* A, если для всякого $x \in A$ найдется такая открытая в X окрестность U, что $\mathscr{L}$ индуцирует 0 на $U \setminus U \cap A$. В частности, это будет иметь место, если $\mathscr{L}$ *сконцентрирован на* A, т. е. если $\mathscr{L}$ индуцирует 0 на $X \setminus A$.

Покажем прежде всего, что без всяких предположений относительно A или $\mathscr{L}$ можно определить канонический гомоморфизм дифференциальных пучков

$$\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}) \mid A \to \mathscr{C}^*(A; \mathscr{L}). \tag{1}$$

Его достаточно определить в степени 0 и потом итерировать эту конструкцию очевидным образом.

Итак, пусть U открыто в A (U не обязательно открыто в X). Мы должны построить *естественным* образом гомоморфизм

$$\mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})(U) \to \mathscr{C}^0(A; \mathscr{L})(U).$$

Прежде всего по определению имеем

$$\mathscr{C}^0(A; \mathscr{L})(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{L}(x). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь слои над точками $\mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})(x)$. Росток сечения пучка $\mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})$ в точке x есть не что иное, как росток не обязательно непрерывного сечения пучка $\mathscr{L}$ в точке x. Значит, он имеет вполне определенное *значение* в точке x, принадлежащее группе $\mathscr{L}(x)$. Иными словами, для всякого x имеем канонический гомоморфизм

$$v(x): \mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})(x) \to \mathscr{L}(x).$$

Это позволяет определить гомоморфизм

$$v(U): \mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})(U) \to \prod_{x \in U} \mathscr{L}(x)$$

для всякого $U \subset X$, *не обязательно открытого*. Если s — элемент группы $\mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})(U)$, то $v(U)s = (v(x)s(x))_{x \in U}$ — элемент группы $\prod_{x \in U} \mathscr{L}(x)$.

Гомоморфизм (1) в степени 0 определяем теперь набором гомоморфизмов $v(U)$, где U открыто в A.

Определив гомоморфизм (1) в степени 0 и переходя к фактор-пучкам, получаем гомоморфизм

$$\mathscr{Z}^1(X; \mathscr{L}) \mid A \to \mathscr{Z}^1(A; \mathscr{L}).$$

Его композиция с гомоморфизмом (1) в степени 0 для пучка $\mathscr{Z}^1(X; \mathscr{L})$ дает гомоморфизм (1) в степени 1 и т. д.

Лемма 4.9.1. *Если пучок $\mathscr{L}$ локально сконцентрирован на A, то канонический гомоморфизм*

$$\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}) \mid A \to \mathscr{C}^*(A; \mathscr{L})$$

является изоморфизмом.

Рассуждая по индукции, легко заметить, что достаточно доказать лемму в степени 0, а для этого достаточно рассмотреть слои над некоторой точкой $x \in A$. Имеем

$$\mathscr{C}^0(X; \mathscr{L})(x) = \varinjlim_{U \ni x} \prod_{y \in U} \mathscr{L}(y),$$

$$\mathscr{C}^0(A; \mathscr{L})(x) = \varinjlim_{U \ni x} \prod_{y \in U \cap A} \mathscr{L}(y),$$

когда U пробегает множество открытых окрестностей точки x в X. Так как для достаточно малой окрестности U имеем $\mathscr{S}(y)=0$, если $y \in U \setminus U \cap A$, то мы сразу получаем искомый результат.

Возьмем снова подпространство A и пучок $\mathscr{S}$ с базой X. Рассматривая композицию гомоморфизма (1) с гомоморфизмом, сопоставляющим любому сечению пучка над X его ограничение на A, мы получим гомоморфизм комплексов

$$C^*(X;\ \mathscr{S}) \to C^*(A;\ \mathscr{S}).$$

Пусть, кроме того, Φ — семейство носителей в X. Обозначим через $\Phi \cap A$ семейство множеств $S \cap A$, $S \in \Phi$ (это семейство носителей в пространстве A). Очевидно, что предыдущий гомоморфизм индуцирует гомоморфизм

$$C^*_\Phi(X;\ \mathscr{S}) \to C^*_{\Phi \cap A}(A;\ \mathscr{S}),$$

который при переходе к когомологиям дает гомоморфизмы

$$\boxed{H^n_\Phi(X;\ \mathscr{S}) \to H^n_{\Phi \cap A}(A;\ \mathscr{S}),}$$

определенные без всяких предположений относительно A, Φ или $\mathscr{S}$.

Теорема 4.9.1. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X, $\mathscr{S}$ — пучок с базой X, A — подпространство в X. Канонические гомоморфизмы*

$$H^n_\Phi(X;\ \mathscr{S}) \to H^n_{\Phi \cap A}(A;\ \mathscr{S})$$

являются изоморфизмами в следующих случаях:

(a) *A замкнуто в X, $\mathscr{S}$ сконцентрирован на A;*

(b) *A локально замкнуто в X, $\mathscr{S}$ локально сконцентрирован на A, и все $S \in \Phi$ содержатся в A (так что $\Phi = \Phi \cap A$).*

В действительности, как мы сейчас покажем, в этих двух случаях гомоморфизм

$$C^*_\Phi(X;\ \mathscr{S}) \to C^*_{\Phi \cap A}(A;\ \mathscr{S})$$

является изоморфизмом, откуда и будет следовать теорема.

Действительно, в обоих этих случаях по лемме 4.9.1 имеем изоморфизм $\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{S}) \mid A = \mathscr{C}^*(A;\ \mathscr{S})$. Если $\mathscr{S}$ индуцирует 0 на *открытом* множестве U, то ясно, что это же верно по самому построению и для $\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{S})$. Таким образом, в случае (a) видим, что $\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{S})$ сконцентрирован на A, что и доказывает утверждение теоремы. В случае (b) возьмем произвольную точку $x \in A$. Точка x обладает в X такой открытой окрестностью U, что $A \cap U$ замкнуто в U и $\mathscr{S}$ индуцирует 0 в $U \setminus U \cap A$. Так как $U \setminus U \cap A$ *открыто* в X, то пучок $\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{S})$ локально сконцентрирован на A и, следовательно, все сводится к доказательству следующей леммы.

Лемма 4.9.2. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X, $\mathscr{F}$ — пучок с базой X и A — подпространство в X. Для того чтобы канонический гомоморфизм*

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{F}) \to \Gamma_{\Phi \cap A}(\mathscr{F} \mid A)$$

был изоморфизмом, достаточно, чтобы $\mathscr{F}$ был локально сконцентрирован на A и чтобы все $S \in \Phi$ содержались в A.

Ясно, что при указанных предположениях рассматриваемый гомоморфизм является мономорфизмом, поэтому достаточно доказать, что он есть эпиморфизм.

Пусть s — сечение из $\Gamma_{\Phi \cap A}(\mathscr{F} \mid A)$, т. е. сечение пучка $\mathscr{F}$ над A, равное 0 вне некоторого $S \in \Phi$. Обозначим через $\bar{s}$ отображение пространства X в накрывающее пространство $\mathscr{F}$, которое совпадает с s на A и равно 0 на $X \setminus A$. Все сводится к доказательству непрерывности отображения $\bar{s}$ в любой точке $x \in X$. Достаточно, впрочем, доказать это для точек $x \in \bar{A}$. Прежде всего если $x \in A$, то x имеет в X такую открытую окрестность U, что $\mathscr{L}$ индуцирует 0 в $U \setminus U \cap A$. Так как ограничение отображения $\bar{s}$ на $U \cap A$ непрерывно, то ясно, что $\bar{s}$ непрерывно в U и, следовательно, в точке x. Пусть теперь $x \in \bar{A} \setminus A$. Так как $\bar{s}$ равно 0 вне некоторого множества $S \subset A$, *замкнутого в* X, то $\bar{s}$ равно 0 в окрестности точки x. Это доказывает лемму.

Следствие. *Пусть X — топологическое пространство, A — замкнутое подпространство в X и $\mathscr{F}$ — пучок с базой A. Тогда существуют канонические изоморфизмы*

$$H^n(A; \mathscr{F}) = H^n(X; \mathscr{F}^X).$$

Этот последний результат не распространяется на локально замкнутые подпространства. В частности, он может оказаться несправедливым для открытого подпространства.

4.10. Точная последовательность, связанная с замкнутым подпространством.

Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{L}$ — пучок с базой X и A — *замкнутое подпространство в* X. В этом случае мы имеем (теорема 2.9.3) точную последовательность

$$0 \to \mathscr{L}_{X \setminus A} \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}_A \to 0,$$

из которой для любого семейства носителей Φ в X вытекает точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^n_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}) \to H^n_\Phi(X; \mathscr{L}) \to$$
$$\to H^n_\Phi(X; \mathscr{L}_A) \to H^{n+1}_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}) \to \ldots .$$

Если Y — любое подпространство в X, то через $\Phi | Y$ обозначим множество подмножеств $S \in \Phi$, содержащихся в Y (так что $\Phi | Y = \Phi \cap Y$, если Y замкнуто в X). Согласно теореме 4.9.1 (а), имеем

$$H^n_\Phi(X; \mathscr{L}_A) = H^n_{\Phi | A}(A; \mathscr{L}). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь группы $H^n_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A})$. Это группы когомологий комплекса

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A})) = C^*_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}).$$

Так как $X \setminus A$ *открыто*, то имеется канонический гомоморфизм

$$\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A})_{X \setminus A} \to \mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}),$$

из которого следует гомоморфизм

$$\Gamma_\Phi[\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A})_{X \setminus A}] \to C^*_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}). \tag{2}$$

Но если пучок $\mathscr{F}$ над X сконцентрирован на $X \setminus A$, то его сечения имеют носителями множества из $X \setminus A$, откуда немедленно вытекает в силу леммы 4.9.2 изоморфизм

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{F}) = \Gamma_{\Phi | X \setminus A}(\mathscr{F} | X \setminus A). \tag{3}$$

Мы получаем, следовательно, что

$$\Gamma_\Phi[\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A})_{X \setminus A}] = \Gamma_{\Phi | X \setminus A}[\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}) | X \setminus A] =$$
$$= \Gamma_{\Phi | X \setminus A}[\mathscr{C}^*(X \setminus A; \mathscr{L})] = C^*_{\Phi | X \setminus A}(X \setminus A; \mathscr{L})$$

в силу леммы 4.9.1 (заметим, что *всякий* пучок с базой X локально сконцентрирован на $X \setminus A$, так как $X \setminus A$ открыто).

Следовательно, (2) отождествляется с каноническим гомоморфизмом

$$C^*_{\Phi | X \setminus A}(X \setminus A; \mathscr{L}) \to C^*_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}),$$

из которого следуют канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H^n_{\Phi | X \setminus A}(X \setminus A; \mathscr{L}) \to H^n_\Phi(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}).} \tag{4}$$

Если Φ — паракомпактифицирующее семейство, то эти гомоморфизмы являются изоморфизмами. Действительно, гомоморфизм

$$\mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A})_{X \setminus A} \to \mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_{X \setminus A}),$$

из которого мы исходим, является гомоморфизмом *резольвент* пучка $\mathscr{L}_{X \setminus A}$. Поэтому все сводится к доказательству того, что

$\mathcal{C}^n(X; \mathcal{L}_{X \setminus A})_{X \setminus A}$ есть Ф-мягкий пучок, а это является непосредственным следствием теоремы 3.5.5 (b). Итак, мы получаем теорему.

Теорема 4.10.1. *Пусть X — топологическое пространство, A — замкнутое подпространство в X и Φ — паракомпактифицирующее семейство в X. Для всякого пучка $\mathcal{L}$ с базой X имеем точную последовательность когомологий*

$$\ldots \to H^n_{\Phi \mid X \setminus A}(X \setminus A; \mathcal{L}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{L}) \to$$
$$\to H^n_{\Phi \mid A}(A; \mathcal{L}) \to H^{n+1}_{\Phi \mid X \setminus A}(X \setminus A; \mathcal{L}) \to \ldots.$$

Одним из наиболее важных случаев является случай, когда X компактно, а Φ — семейство всех замкнутых множеств в X. В этом случае в предыдущей последовательности фигурируют когомологии *с компактными носителями* локально компактного пространства $X \setminus A$.

Замечание 4.10.1. Для всякого *локально замкнутого* подпространства A можно определить гомоморфизмы

$$H^n_{\Phi \mid A}(A; \mathcal{L}) \to H^n_\Phi(X; \mathcal{L}_A),$$

не предполагая семейство Φ паракомпактифицирующим. Действительно, $H^n_{\Phi \mid A}(A; \mathcal{L})$ представляет собой когомологии комплекса $\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})_A)$. Ясно, что $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})_A$ есть *резольвента* пучка $\mathcal{L}_A$, и потому искомые гомоморфизмы вытекают из результатов п. 4.7. Разумеется, если A открыто, то в силу теоремы 4.7.2 мы получим вновь гомоморфизмы, определенные выше, без использования спектральных последовательностей.

Если семейство Φ паракомпактифицирующее, то в силу теоремы 3.5.5 (b) $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{L})_A$ является резольвентой пучка $\mathcal{L}_A$, состоящей из Ф-мягких пучков. Следовательно, рассматриваемые гомоморфизмы в этом случае будут изоморфизмами. Этот факт, впрочем, можно было бы получить также, комбинируя случай открытого подпространства, рассмотренный выше, со случаем замкнутого подпространства, рассмотренным в теореме 4.9.1.

Замечание 4.10.2. Точную последовательность теоремы 4.10.1 можно получить также следующим образом. Возьмем резольвенту $\mathcal{F}^*$ пучка $\mathcal{L}$, состоящую из Ф-мягких пучков, и напишем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F}^*_{X \setminus A} \to \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}^*_A \to 0.$$

Так как все входящие сюда пучки являются Ф-мягкими, то мы получаем точную последовательность комплексов

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*_{X \setminus A}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*_A) \to 0$$

и, следовательно, соответствующую точную последовательность когомологий. В силу теоремы 4.7.3 эта последовательность канонически

отождествляется с точной последовательностью, связывающей пучки $\mathscr{L}_{X\setminus A}$, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_A$. При этом имеем

$$\Gamma_\Phi\left(\mathscr{F}^*_{X\setminus A}\right)=\Gamma_{\Phi\mid X\setminus A}(\mathscr{F}^*\mid X\setminus A),\quad \Gamma_\Phi\left(\mathscr{F}^*_A\right)=\Gamma_{\Phi\mid A}(\mathscr{F}^*\mid A).$$

Так как $\mathscr{F}^*$ индуцирует над $X\setminus A$ (соответственно A) резольвенту пучка $\mathscr{L}\mid X\setminus A$ (соответственно $\mathscr{L}\mid A$), состоящую из $(\Phi\mid X\setminus A)$-мягких (соответственно $(\Phi\mid A)$-мягких) пучков, то в силу теоремы 3.5.5 получаем канонические изоморфизмы

$$H^n\left(\Gamma_\Phi\left(\mathscr{F}^*_{X\setminus A}\right)\right)=H^n_{\Phi\mid X\setminus A}(X\setminus A;\ \mathscr{L});$$
$$H^n_\Phi\left(\Gamma_\Phi\left(\mathscr{F}^*_A\right)\right)=H^n_{\Phi\mid A}(A;\ \mathscr{L}),$$

что и дает требуемый результат.

Это построение часто используется для выражения групп $H^n_{\Phi\mid X\setminus A}(X\setminus A;\ \mathscr{L})$ через „относительные" группы когомологий в классическом смысле слова.

Пример 4.10.1. Пусть сначала пространство X произвольно. Рассмотрим дифференциальный пучок $\mathscr{F}^*(X;\ \mathbf{Z})$ коцепей Александера — Спаньера пространства X с целочисленными значениями. Обозначим через $F^n(X;\ \mathbf{Z})$ группу отображений $X^{n+1}\to\mathbf{Z}$ по модулю отображений, имеющих „пустой носитель", т. е. локально нулевых.

Если A — замкнутое подпространство в X, то мы имеем, очевидно, точную последовательность

$$0\to F^*(X \bmod A;\ \mathbf{Z})\to F^*(X;\ \mathbf{Z})\to F^*(A;\ \mathbf{Z})\to 0,$$

которая получается, если сопоставить каждому отображению $X^{n+1}\to\mathbf{Z}$ его ограничение на A^{n+1}. Отсюда следует точная последовательность когомологий, выписывать которую излишне. Группы когомологий ядра $F^*(X \bmod A;\ \mathbf{Z})$ обозначаются через $H^n(X \bmod A;\ \mathbf{Z})$.

Предположим теперь, что X *паракомпактно*. Тогда известно, что

$$F^*(X;\ \mathbf{Z})=\Gamma(\mathscr{F}^*(X;\ \mathbf{Z}))$$

(см. пример 3.9.2). Точно так же

$$F^*(A;\ \mathbf{Z})=\Gamma(\mathscr{F}^*(A;\ \mathbf{Z})),$$

и так как $\mathscr{F}^*(X;\ \mathbf{Z})$ и $\mathscr{F}^*(A;\ \mathbf{Z})$ состоят из тонких пучков (пример 4.7.1), то

$$H^n(X;\ \mathbf{Z})=H^n(F^*(X;\ \mathbf{Z}));\quad H^n(A;\ \mathbf{Z})=H^n(F^*(A;\ \mathbf{Z})).$$

Имеем, далее, коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Gamma\left(\mathscr{F}^*(X;\ \mathbf{Z})_{X\setminus A}\right) & \to & \Gamma(\mathscr{F}^*(X;\ \mathbf{Z})) & \to & \Gamma(\mathscr{F}^*(X;\ \mathbf{Z})_A) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F^*(X \bmod A;\ \mathbf{Z}) & \to & F^*(X;\ \mathbf{Z}) & \to & F^*(A;\ \mathbf{Z}) & \to & 0,
\end{array}$$

которая получается следующим образом. Сечение пучка $\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})_A$ канонически отождествляется с сечением пучка $\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})$ над A, которое можно продолжить на X и которое, таким образом, определяет отображение $X^{n+1} \to \mathbf{Z}$ (это соответствие не является взаимно однозначным: два таких отображения определяют то же самое сечение над A тогда и только тогда, когда носитель их разности не пересекается с A). Ограничение этого отображения на A^{n+1} и является по определению образом данного сечения при гомоморфизме

$$\Gamma(\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})_A) \to F^*(A; \mathbf{Z}).$$

Аналогично определяется гомоморфизм в левой части диаграммы.

Сравнивая теперь соответствующие точные последовательности когомологий, получаем следующий результат:

$$\boxed{H^n(X \bmod A; \mathbf{Z}) = H^n_\Phi(X \setminus A; \mathbf{Z}),}$$

где Φ образовано множествами из $X \setminus A$, замкнутыми в X.

Этот результат не тривиален, так как гомоморфизм

$$\Gamma(\mathscr{F}^*(X; \mathbf{Z})_{X \setminus A}) \to F^*(X \bmod A; \mathbf{Z})$$

не является изоморфизмом. Действительно, ясно, что его образ состоит из коцепей Александера — Спаньера пространства X, которые равны 0 *в окрестности* множества A, а не из коцепей, индуцирующих 0 на A.

4.11. Соотношения между когомологиями подпространства и его окрестностей.

Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{L}$ — пучок над X. Мы ограничимся здесь рассмотрением когомологий с произвольными носителями.

Пусть даны два подмножества A и B в X, причем $A \supset B$. Из п. 4.9 следует существование канонического гомоморфизма

$$\mathscr{C}^*(A; \mathscr{L}) \mid B \to \mathscr{C}^*(B; \mathscr{L}).$$

Переходя к сечениям, получаем отсюда гомоморфизм

$$C^*(A; \mathscr{L}) \to C^*(B; \mathscr{L}),$$

который определяет гомоморфизмы „ограничения"

$$\boxed{H^n(A; \mathscr{L}) \to H^n(B; \mathscr{L}) \text{ для } A \supset B.}$$

Очевидно, что выполнены обычные условия транзитивности, так что, например, формула

$$U \to H^n(U;\ \mathscr{L})$$

определяет *предпучок* с базой X. Если $n = 0$, то это не что иное, как $\mathscr{L}$. Если же $n \geqslant 1$, то этот предпучок порождает *нулевой* пучок, так как в $C^*(U;\ \mathscr{L})$ всякий коцикл степени $n \geqslant 1$ является *локально* кограницей.

Сформулируем теперь основной результат этого пункта.

Теорема 4.11.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{L}$ — пучок с базой X, A — подпространство в X. Для того чтобы канонический гомоморфизм*

$$\varinjlim_{U \supset A} H^*(U;\ \mathscr{L}) \to H^*(A;\ \mathscr{L})$$

был изоморфизмом[1]*), достаточно выполнение одного из следующих двух условий:*

(a) *X паракомпактно и A замкнуто в X;*

(b) *X метризуемо.*

Действительно, в каждом из этих двух случаев, по теореме 3.3.1 и ее следствиям, имеем изоморфизмы

$$\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L})(A) = \varinjlim \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L})(U) = \varinjlim C^*(U;\ \mathscr{L})$$

и, следовательно, все сводится к доказательству того, что группы $H^n(A;\ \mathscr{L})$ можно вычислять при помощи резольвенты $\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L})|A$ пучка $\mathscr{L}|A$. Но в случае (a) пучки $\mathscr{C}^n(X;\ \mathscr{L})|A$ являются мягкими (теорема 3.4.2), а в случае (b) они даже вялые (следствие 2 из теоремы 3.3.1), что и дает требуемый результат.

Само собой очевидно, что в случае, когда эта теорема справедлива, в ней можно заменить систему открытых окрестностей множества A произвольной фундаментальной системой окрестностей (открытых или нет) множества A.

4.12. Когомологии со значениями в индуктивном пределе.

Пусть X — пространство, Φ — семейство носителей в X и

$$\mathscr{L} = \varinjlim_{\lambda} \mathscr{L}_\lambda$$

— индуктивный предел пучков над X. Существуют гомоморфизмы дифференциальных пучков

$$\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L}_\lambda) \to \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L}),$$

[1]) Имеется в виду индуктивный предел по семейству всех открытых окрестностей множества A. — *Прим. ред.*

которые дают гомоморфизм

$$\varinjlim_{\lambda} \mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_\lambda) \to \mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}). \tag{1}$$

Левая часть в (1) является резольвентой пучка $\mathscr{L}$, что легко увидеть, рассматривая слои над точками. К сожалению, неизвестно, является ли эта резольвента вялой. Более того, сечения этой резольвенты с носителями в Φ нельзя, вообще говоря, отождествить с элементами комплекса

$$\lim \operatorname{ind} C^*_\Phi(X; \mathscr{L}_\lambda).$$

Если семейство Φ — паракомпактифицирующее, то левая часть в (1) образована во всяком случае Φ-мягкими пучками, так как всякий пучок $\mathscr{C}^n(X; \mathscr{L}_\lambda)$ есть модуль над пучком колец $\mathscr{C}^0(X; \mathbf{Z})$, который является вялым пучком, и, следовательно, $\lim \operatorname{ind} \mathscr{C}^n(X; \mathscr{L}_\lambda)$ также есть модуль над вялым пучком колец. Таким образом, Φ-когомологии с коэффициентами в $\mathscr{L}$ можно в этом случае вычислять с помощью сечений пучка $\lim \operatorname{ind} \mathscr{C}^*(X; \mathscr{L}_\lambda)$.

Далее, если X локально компактно, а Φ — семейство компактов в X, то второй трудности не возникает в силу теоремы 3.10.1. Поэтому получаем следующий результат.

Теорема 4.12.1. *Пусть*

$$\mathscr{L} = \lim_{\lambda} \operatorname{ind} \mathscr{L}_\lambda$$

— индуктивный предел пучков над локально компактным пространством X. Тогда для когомологий с компактными носителями канонические гомоморфизмы

$$\lim_{\lambda} \operatorname{ind} H^n_c(X; \mathscr{L}_\lambda) \to H^n_c(X; \mathscr{L})$$

являются изоморфизмами.

В случае когда X — *пространство Зариского*, левая часть в (1), согласно п. 3.10, является *вялой* резольвентой пучка $\mathscr{L}$ и, кроме того, сечения этой резольвенты образуют комплекс, изоморфный индуктивному пределу комплексов $C^*(X; \mathscr{L}_\lambda)$. Значит, в этом случае справедлив тот же результат, а именно

$$H^*(X; \mathscr{L}) = \lim_{\lambda} \operatorname{ind} H^*(X; \mathscr{L}_\lambda).$$

4.13. Когомологическая размерность.

Пусть X — топологическое пространство и Φ — семейство носителей в X. Говорят, что X имеет *конечную Φ-размерность*, если существует такое целое n, что

$$H^i_\Phi(X; \mathscr{A}) = 0 \text{ для } i > n,$$

каков бы ни был пучок $\mathcal{A}$ над X. Наименьшее целое n, обладающее этим свойством, называется *Ф-размерностью* пространства X. Если Ф — семейство всех замкнутых подмножеств, то говорят, что n есть размерность (или *когомологическая размерность*) пространства X.

С другой стороны, говорят, что пучок $\mathcal{A}$ с базой X является *Ф-ацикличным*, если $H^i_\Phi(X;\ \mathcal{A})=0$ для $i\geqslant 1$. Такими будут, например, вялые пучки и Ф-мягкие пучки, когда Ф — паракомпактифицирующее семейство. Если имеем резольвенту $\mathcal{A}^*$ пучка $\mathcal{A}$, состоящую из Ф-ацикличных пучков $\mathcal{A}^n$, то ясно (теорема 4.7.1), что

$$H^i_\Phi(X;\ \mathcal{A})=H^i(\Gamma_\Phi(\mathcal{A}^*))$$

для всех i. Следовательно, если всякий пучок $\mathcal{A}$ над X допускает Ф-ацикличную резольвенту длины n (т. е. такую, что $\mathcal{A}^i=0$ для $i>n$), то пространство X имеет Ф-размерность $\leqslant n$. Обратное тоже верно. Действительно, рассмотрим каноническую резольвенту $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})$. Для любого n из нее можно получить резольвенту длины n, а именно

$$0\to\mathcal{A}\to\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})\to\ \dots\ \to\mathcal{C}^{n-1}(X;\ \mathcal{A})\to\mathcal{Z}^n(X;\ \mathcal{A})\to 0. \qquad (1)$$

Так как

$$H^i_\Phi\big(X;\ \mathcal{Z}^n(X;\ \mathcal{A})\big)=H^{i+n}_\Phi(X;\ \mathcal{A})$$

для $i>0$, то X имеет Ф-размерность $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{Z}^n(X;\ \mathcal{A})$ является Ф-ацикличным. Это и доказывает наше утверждение.

Для пространства конечной Ф-размерности можно улучшить основные теоремы п. 4.6. Действительно, если X имеет Ф-размерность n, то для построения двойных комплексов можно использовать вместо канонической резольвенты $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})$ Ф-ацикличную резольвенту, определенную точной последовательностью (1). Обозначим ее для краткости также через $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})$, а комплекс ее сечений с носителями в Ф — через $C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A})$. Так как функтор $\mathcal{A}\to\mathcal{Z}^p(X;\ \mathcal{A})$ всегда *точен*, а пучки $\mathcal{Z}^n(X;\ \mathcal{A})$ Ф-ацикличны, то мы получим точные функторы $\mathcal{A}\to\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})$ и $\mathcal{A}\to C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A})$. Если теперь на X задан дифференциальный пучок $\mathcal{L}^*$, то первая градуировка двойного комплекса $C^*_\Phi(X;\ \mathcal{L}^*)$ ограничена *снизу и сверху*, так что обе спектральные последовательности этого двойного комплекса оказываются „сходящимися", даже если градуировка в $\mathcal{L}^*$ не ограничена снизу. Отсюда вытекает, например, что *если X имеет конечную Ф-размерность, то теорема 4.6.2 справедлива даже в том случае, когда градуировка пучков $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{M}^*$ не ограничена снизу.* Этот результат существенен, например, для теории многообразий, как это будет показано во втором томе настоящего труда.

4.14. Локальный характер размерности в паракомпактных пространствах.

В этом пункте мы будем рассматривать *паракомпактное* пространство X и брать в качестве Φ семейство всех замкнутых подмножеств из X. Для того чтобы X имело размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы пучок $\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})$ был ацикличным для любого пучка $\mathcal{A}$. Но $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ есть резольвента пучка $\mathcal{A}$, состоящая из *тонких* пучков. Следовательно, для любого открытого U из X пучок $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})_U = \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}) \otimes \mathbf{Z}_U$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}_U$, состоящей из тонких, а значит, и ацикличных пучков. Отсюда вытекает, что пучок $\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})_U$ ацикличен для любого открытого $U \subset X$, и так как для всякого пучка $\mathcal{F}$ последовательность

$$0 \to \Gamma(\mathcal{F}_U) \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}(X - U) \to H^1(X; \mathcal{F}_U)$$

точна, то это показывает, что $\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})$ — мягкий пучок, если X имеет размерность $\leqslant n$.

Итак, *паракомпактное пространство X имеет размерность $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда всякий пучок с базой X допускает резольвенту длины n, состоящую из мягких пучков.*

Отсюда вытекает, что для паракомпактных пространств свойство [1])

$$\dim(X) \leqslant n$$

является локальным свойством. Действительно, предположим, что всякая точка $x \in X$ обладает в X окрестностью $U(x)$ размерности $\leqslant n$. Можно предположить, что $U(x)$ замкнуто в X, так как размерность замкнутого подмножества не превышает размерности объемлющего пространства, в силу следствия из теоремы 4.9.1. Для всякого пучка $\mathcal{A}$ с базой X пучок $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ индуцирует в $U(x)$ резольвенту пучка $\mathcal{A} | U(x)$, состоящую из тонких пучков, и так как $U(x)$ имеет размерность $\leqslant n$ и, кроме того, паракомпактно, то в силу доказанного выше $\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})$ индуцирует на $U(x)$ мягкий пучок. Следовательно, $\mathcal{Z}^n(X; \mathcal{A})$ есть мягкий пучок (теорема 3.4.1) и мы доказали наше утверждение.

Теорема 4.14.1. *Для того чтобы паракомпактное пространство X имело когомологическую размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы всякая точка X имела окрестность когомологической размерности $\leqslant n$.*

[1]) Через $\dim(X)$ [соответственно $\dim_\Phi(X)$] автор обозначает когомологическую размерность (соответственно Φ-размерность пространства X). — *Прим. ред.*

Замечание 4.14.1. Если имеется паракомпактифицирующее семейство Φ в произвольном пространстве X, то легко видеть, что условие

$$\dim_\Phi(X) \leqslant n$$

эквивалентно условию

$$\dim(S) \leqslant n \text{ для всех } S \in \Phi,$$

так что предыдущая теорема по существу покрывает случай произвольного паракомпактифицирующего семейства.

Отметим, наконец, следующий результат, относящийся к метризуемым пространствам. Неизвестно, верен ли он для произвольных паракомпактных пространств.

Теорема 4.14.2. *Пусть X — метризуемое пространство. Если X имеет когомологическую размерность $\leqslant n$, то то же справедливо и для всякого подпространства в X.*

Действительно, пусть $\mathscr{S}$ — пучок над подпространством $A \subset X$. Существует (теорема 2.9.4) пучок с базой X, который индуцирует на A заданный пучок. Следовательно, достаточно доказать, что

$$H^i(A; \mathscr{S}) = 0 \text{ для } i > n,$$

когда $\mathscr{S}$ — пучок с базой X. Согласно теореме 4.11.1, когомологии пространства A являются индуктивным пределом когомологий окрестностей множества A в X, так что все сводится к случаю, когда A *открыто* в X. Так как A, будучи метризуемым, паракомпактно, то достаточно показать (теорема 4.14.1), что всякая $a \in A$ обладает в A окрестностью $V(a)$, имеющей когомологическую размерность $\leqslant n$. Последнее очевидно, так как всякая $a \in A$ имеет в A *замкнутую в X* окрестность. Отсюда и следует теорема.

4.15. Случай компактных пространств или пространств Зариского.

Мы докажем теперь следующую теорему, принадлежащую А. Гротендику.

Теорема 4.15.1. *Пусть X — компактное пространство или пространство Зариского. Для того чтобы X имело когомологическую размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$H^i(X; \mathbf{Z}_U) = 0 \text{ *для* } i > n$$

и для всех открытых множеств $U \subset X$.

Действительно, предположим, что указанное в теореме условие выполнено, и пусть $\mathscr{A}$ — пучок абелевых групп с базой X.

Известно (замечание 2.9.2), что можно найти семейство открытых множеств $(U_i)_{i\in I}$ и *эпиморфизм*

$$\bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}_{U_i} \to \mathcal{A}.$$

В силу теоремы 4.12.1, наше утверждение достаточно доказать для случая, когда семейство I конечно. В этом случае $\mathcal{A}$ допускает композиционный ряд

$$0 = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_m = \mathcal{A},$$

факторы $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1}$ которого являются образами пучков вида $\mathbf{Z}_U$. Применяя индукцию по m и используя точную последовательность когомологий, мы сведем доказательство теоремы к случаю, когда существует точная последовательность вида

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathbf{Z}_U \to \mathcal{A} \to 0.$$

В этом случае, очевидно, достаточно доказать, что

$$H^p(X; \mathcal{L}) = 0 \text{ для } p > n.$$

Известно, однако (замечание 2.9.3), что $\mathcal{L}$ допускает композиционный ряд конечной длины m, факторы которого имеют вид $\mathbf{Z}_A$, где A локально замкнуто в X. Применяя еще раз индукцию по m, видим, что все сводится к доказательству равенства

$$H^p(X; \mathbf{Z}_A) = 0 \text{ для } p > n,$$

где A имеет вид $U \setminus V$, U и V открыты в X и $V \subset U$. Но в этом случае имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_V \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z}_A \to 0,$$

что и завершает доказательство.

Если X — *пространство Зариского*, то теорема особенно важна в том случае, когда алгебраическая размерность пространства X конечна. При этом *алгебраической размерностью* пространства X называют такое наибольшее n, что в X можно найти *строго возрастающую* последовательность

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$$

непустых, замкнутых и неприводимых множеств. Ясно (или по крайней мере хорошо известно), что алгебраическое многообразие, имеющее размерность n в обычном смысле, имеет размерность n и как пространство Зариского.

Теорема 4.15.2. (Гротендик.) *Пространство Зариского алгебраической размерности $\leqslant n$ имеет когомологическую размерность $\leqslant n$.*

Будем доказывать теорему индукцией по алгебраической размерности n пространства X. Если $n=0$, то теорема тривиальна, так как тогда X — конечное множество с дискретной топологией. Предположим теперь, что X имеет размерность n, и обозначим через X_k $(1 \leqslant k \leqslant s)$ неприводимые компоненты пространства X (т. е. максимальные неприводимые замкнутые подмножества в X). Их конечное число, они имеют алгебраическую размерность $\leqslant n$, и их объединение есть X. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок с базой X; положим $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{X_k}$. Так как X_k замкнуто, то существуют канонические гомоморфизмы $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_k$ для всех k, откуда немедленно следует существование точной последовательности пучков вида

$$0 \to \mathcal{A} \to \bigoplus_k \mathcal{A}_k \to \mathcal{B} \to 0.$$

Ясно, что $\mathcal{B}$ равен нулю вне объединения множеств

$$X_i \cap X_j \qquad (i \neq j),$$

которое замкнуто и имеет алгебраическую размерность $\leqslant n-1$ [1]). Согласно индуктивному предположению, имеем $H^p(X;\ \mathcal{B}) = 0$ для $p > n-1$. Следовательно, нам достаточно доказать, что $H^p(X;\ \mathcal{A}_k) = 0$ для $p > n$ и всех k. Так как $H^p(X;\ \mathcal{A}_k) = H^p(X_k;\ \mathcal{A})$, то это значит, что можно предполагать X *неприводимым*.

Мы покажем сейчас, что в этом случае выполнены условия предыдущей теоремы. Действительно, пусть U открыто в X. Точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{X \setminus U} \to 0$$

дает для любого p точную последовательность

$$H^{p-1}(X \setminus U;\ \mathbf{Z}) \to H^p(X;\ \mathbf{Z}_U) \to H^p(X;\ \mathbf{Z}).$$

Если $p > n$, то ее первый член равен 0 по индуктивному предположению, так как X неприводимо, и поэтому $X \setminus U$ имеет алгебраическую размерность $\leqslant n-1$ [1]). Последний член $H^p(X;\ \mathbf{Z})$ равен 0 при $p \geqslant 1$, так как X неприводимо, и, следовательно, $\mathbf{Z}$ — вялый пучок. Это и доказывает теорему.

4.16. Действие непрерывного отображения на когомологии.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \to Y$, пучок $\mathcal{B}$ с базой Y и его обратный образ $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$. Пусть в X и Y заданы такие

[1]) Здесь используется следующее утверждение (доказательство которого тривиально): *всякое собственное замкнутое подмножество неприводимого пространства Зариского алгебраической размерности n имеет алгебраическую размерность $\leqslant n-1$. — Прим. ред.*

семейства носителей Φ и Ψ, что из $T \in \Psi$ следует $f^{-1}T \in \Phi$. Мы хотим определить канонический гомоморфизм

$$f^*: H^*_\Psi(Y;\ \mathcal{B}) \to H^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}). \tag{1}$$

Для этого заметим прежде всего, что функтор $\mathcal{B} \to f^*\mathcal{B}$ *точен* (п. 2.11) и, следовательно, $f^*(\mathcal{C}^*(Y;\ \mathcal{B}))$ является резольвентой пучка $f^*(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, так что имеется канонический гомоморфизм

$$H^*\left[\Gamma_\Phi(f^*(\mathcal{C}^*(Y;\ \mathcal{B})))\right] \to H^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}). \tag{2}$$

С другой стороны, рассуждения п. 1.12 приводят нас естественным образом к гомоморфизму

$$\Gamma_\Psi(\mathcal{C}^*(Y;\ \mathcal{B})) \to \Gamma_\Phi\left[f^*(\mathcal{C}^*(Y;\ \mathcal{B}))\right]$$

и после перехода к когомологиям к гомоморфизму

$$H^*_\Psi(Y;\ \mathcal{B}) \to H^*\left[\Gamma_\Phi(f^*(\mathcal{C}^*(Y;\ \mathcal{B})))\right]. \tag{3}$$

Композиция гомоморфизмов (2) и (3) является искомым гомоморфизмом.

Отображения (1) обладают рядом „функторных“ свойств. Мы ограничимся только их формулировками, предоставляя читателю восстановление доказательств, если он сочтет это необходимым.

Прежде всего гомоморфизмы (1) совместимы с гомоморфизмами пучков.

Они совместимы также и с точными последовательностями: если имеется точная последовательность пучков над Y

$$0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$$

и, следовательно, точная последовательность пучков над X

$$0 \to f^*(\mathcal{B}') \to f^*(\mathcal{B}) \to f^*(\mathcal{B}'') \to 0,$$

то диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^n_\Psi(Y;\ \mathcal{B}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Psi(Y;\ \mathcal{B}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n_\Phi(X;\ f^*(\mathcal{B}'')) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}_\Phi(X;\ f^*(\mathcal{B}')) \end{array}$$

коммутативны.

В качестве примера рассмотрим пространство X, пучок $\mathcal{A}$ над X и подпространство $Y \subset X$. Известно, что обратный образ пучка $\mathcal{A}$ при каноническом вложении $j: Y \to X$ есть не что иное, как $\mathcal{A}|Y$. Отсюда для любых семейств носителей Φ и Ψ в Y и X, таких, что если $S \in \Phi$, то $S \cap Y \in \Psi$, следует существование канонического гомоморфизма

$$H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \to H^n_\Psi(Y;\ \mathcal{A}|Y).$$

Если в качестве Ψ взять семейство $\Phi \cap Y$ (образованное множествами $S \cap Y$ для $S \in \Phi$), то мы вновь получим гомоморфизмы, определенные в п. 4.9.

В качестве другого примера рассмотрим два дифференцируемых многообразия X и Y и дифференцируемое отображение f многообразия X в Y. Пусть Ω_X^* (соответственно Ω_Y^*) — пучок ростков дифференциальных форм на X (соответственно Y). Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma(\Omega_Y^*)) & \longrightarrow & H^*(Y;\, \mathbf{R}) \\ \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^*(\Gamma(f^*(\Omega_Y^*))) & \longrightarrow & H^*(X;\, \mathbf{R}). \end{array}$$

Но сопоставляя каждой дифференциальной форме на Y ее обратный образ при отображении f (в обычном смысле), получаем гомоморфизм

$$f^*\colon \Omega_Y^* \to \Omega_X^*$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma(f^*(\Omega_Y^*))) & \to & H^*(X;\, \mathbf{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{тожд.} \\ H^*(\Gamma(\Omega_Y^*)) & \longrightarrow & H^*(X;\, \mathbf{R}). \end{array}$$

Мы получаем, таким образом, следующий результат: *если замкнутая дифференциальная форма $\bar{\omega}$ на Y представляет класс когомологий $\eta \in H^*(Y;\, \mathbf{R})$, то обратный образ формы $\bar{\omega}$ при отображении f представляет класс когомологий $f^*(\eta) \in H^*(X;\, \mathbf{R})$.*

4.17. Спектральная последовательность расслоенного пространства.

Пусть E — топологическое пространство, π — непрерывное отображение пространства E в топологическое пространство B и $\mathcal{A}$ — пучок с базой E. Мы хотим показать, что когомологии пространства E со значениями в $\mathcal{A}$ являются пределом спектральной последовательности, второй член E_2 которой представляет собой когомологии пространства B с коэффициентами в пучке, который мы сейчас определим.

Для каждого $q \geqslant 0$ сопоставим любому открытому множеству $U \subset B$ группу

$$H^q(\pi^{-1}(U);\, \mathcal{A}).$$

Для $V \subset U$ имеем канонический гомоморфизм

$$H^q(\pi^{-1}(U);\, \mathcal{A}) \to H^q(\pi^{-1}(V);\, \mathcal{A}).$$

Так как условия транзитивности, очевидно, выполнены, то

$$U \to H^q(\pi^{-1}(U); \mathcal{A})$$

является *предпучком* с базой B. *Пучок*, порожденный этим предпучком, обозначим через $\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})$[1]).

Рассмотрим теперь дифференциальный пучок $\pi(\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A}))$ — прямой образ пучка $\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})$ при отображении π (п. 2.12). Так как прямой образ вялого пучка есть вялый пучок, то к B и пучку $\pi(\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})) = \mathcal{L}^*$ можно применить теорему 4.6.1. Существует, следовательно, спектральная последовательность, в которой

$$E_2^{pq} = H^p\big(B; \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)\big)$$

и которая „сходится“ к $H^*(\Gamma(\mathcal{L}^*))$.

По определению прямого образа имеем

$$\Gamma(\mathcal{L}^*) = \Gamma(\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})) = C^*(E; \mathcal{A}).$$

Поэтому рассматриваемая спектральная последовательность сходится к когомологиям пространства E со значениями в $\mathcal{A}$. Пучок $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)$ порожден предпучком

$$U \to H^q(\mathcal{L}^*(U)) = H^q[\mathcal{C}^*(E; \mathcal{A})(\pi^{-1}(U))] = \\ = H^q(C^*(\pi^{-1}(U); \mathcal{A})) = H^q(\pi^{-1}(U); \mathcal{A}),$$

так что $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^*)$ совпадает с $\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})$. Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 4.17.1. *Пусть E и B — топологические пространства, π — непрерывное отображение пространства E в B и $\mathcal{A}$ — пучок с базой E. Обозначим через $\mathcal{H}^q(F; \mathcal{A})$ ($q \geqslant 0$) пучок с базой B, порожденный предпучком*

$$U \to H^q(\pi^{-1}(U); \mathcal{A}).$$

Тогда существует спектральная последовательность, в которой

$$E_2^{pq} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F; \mathcal{A}))$$

и член E_∞ является биградуированной группой, связанной с подходящим образом фильтрованной группой $H^*(E; \mathcal{A})$.

Эта теорема, принадлежащая в основном Ж. Лере, является отправной точкой когомологической теории расслоенных пространств. Ее можно дополнить, рассматривая семейства носителей в B и E. Мы оставляем читателю изучение этого обобщения.

[1]) Заметим, что пучок $\mathcal{H}^0(F; \mathcal{A})$ канонически изоморфен прямому образу $\pi(\mathcal{A})$ пучка $\mathcal{A}$, определенному в п. 2.12. — *Прим. ред.*

Замечание 4.17.1. Обозначение $\mathscr{H}^q(F; \mathscr{A})$ оправдано, по крайней мере частично, следующими рассуждениями. Пусть $x \in B$, положим

$$F(x) = \pi^{-1}(x).$$

Говорят, что $F(x)$ — *слой* над точкой $x \in B$ в E. Рассмотрим теперь формулу

$$\mathscr{H}^q(F; \mathscr{A})(x) = \varinjlim_{U \ni x} H^q(\pi^{-1}(U); \mathscr{A}).$$

Из нее, очевидно, следует канонический гомоморфизм

$$\mathscr{H}^q(F; \mathscr{A})(x) \to H^q(F(x); \mathscr{A}),$$

который является изоморфизмом в том случае, когда к $F(x)$ можно применить теорему 4.11.1 и когда множества $\pi^{-1}(U)$ (U — окрестность точки x в B) образуют фундаментальную систему окрестностей множества $F(x)$ в E. Это будет выполнено, например, в случае, когда E и B *локально компактны*, а отображение π является *собственным* (т. е. полный прообраз всякого компакта из B компактен в E). Действительно, пусть V — открытая окрестность множества $F(x)$ в E. Если U пробегает множество открытых, относительно компактных окрестностей точки x, то имеем $\bigcap \pi^{-1}(\overline{U}) = F(x)$, и, следовательно, пересечение *компактных* множеств $\pi^{-1}(\overline{U}) \cap (E \setminus V)$ пусто. Отсюда следует, что V содержит $\pi^{-1}(U)$ при достаточно малом U. Теорема 4.11.1 применима, так как $F(x)$ допускает в E фундаментальную систему компактных окрестностей. Тем самым наше утверждение доказано.

Детальное изучение спектральной последовательности этого пункта для классических (т. е. „локально тривиальных“) расслоенных пространств можно найти в диссертации А. Бореля [Borel A., *Ann. Math.*, **57** (1953), 115—207[1])].

[1]) Имеется русский перевод: Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, стр. 163—246. — *Прим. ред.*

§ 5. КОГОМОЛОГИИ ЧЕХА

Во всем этом параграфе слово *предпучок* (соответственно пучок) обозначает предпучок (соответственно пучок) *абелевых групп*. Будем считать, что $\mathcal{A}(\phi)=0$ для любого предпучка $\mathcal{A}$ (для пучков это условие выполняется всегда).

В последующих рассуждениях топологическое пространство X фиксировано.

5.1. Коцепи покрытия.

Пусть $\mathcal{A}$ — предпучок с базой X и $\mathfrak{M}=(M_i)_{i\in I}$ — покрытие пространства X. Если $\mathcal{A}$ является *пучком*, то $\mathfrak{M}$ может быть произвольным покрытием пространства X, если же $\mathcal{A}$ — *предпучок*, то будем предполагать, что $\mathfrak{M}$ — *открытое* покрытие.

Пусть S — симплекс нерва покрытия $\mathfrak{M}$, т. е. такое конечное непустое подмножество в I, что множество

$$M_S=\bigcap_{i\in S} M_i$$

не пусто. Сопоставим симплексу S абелеву группу

$$\mathcal{A}(S)=\mathcal{A}(M_S).$$

Если $S'\subset S$, то, очевидно, $M_{S'}\supset M_S$, и поэтому определен гомоморфизм ограничения $\mathcal{A}(S')\to\mathcal{A}(S)$. Мы получаем, таким образом, *систему коэффициентов* на нерве покрытия $\mathfrak{M}$ в смысле гл. I, п. 3.3. Обозначим через

$$C^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})$$

комплекс, состоящий из коцепей нерва покрытия $\mathfrak{M}$ со значениями в определенной нами системе коэффициентов.

Пусть $s=(i_0,\ \dots,\ i_p)$ — p-мерный сингулярный симплекс нерва покрытия $\mathfrak{M}$. Положим

$$M_s=M_{i_0\dots i_p}=M_{i_0}\cap\ \dots\ \cap M_{i_p}.$$

Тогда имеем

$$C^p(\mathfrak{M}, \mathcal{A}) = \prod_{\dim(s)=p} \mathcal{A}(M_s),$$

так что p-мерную коцепь α покрытия $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathcal{A}$ можно также рассматривать [с учетом условия $\mathcal{A}(\phi) = 0$] как семейство

$$\alpha = (\alpha_{i_0 \ldots i_p})_{i_0, \ldots, i_p \in I},$$

где

$$\alpha_{i_0 \ldots i_p} \in \mathcal{A}(M_{i_0 \ldots i_p})$$

для всех $i_0, \ldots, i_p$. Разумеется, что существенную роль здесь играют только те комбинации индексов, которые соответствуют сингулярным симплексам нерва $\mathfrak{M}$.

Операторы граней симплициального коцепного комплекса $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ определяются следующим образом. Пусть $f: \Delta_p \to \Delta_q$ — некоторое отображение и $\alpha \in C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ — коцепь. Тогда коцепь $\overline{f}(\alpha) \in C^q(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ задается формулой $\overline{f}(\alpha)_{j_0 \ldots j_q} =$ ограничению элемента $\alpha_{j_{f(0)} \ldots j_{f(p)}}$ на $M_{j_0 \ldots j_q}$, как это немедленно следует из определений п. 3.3 гл. I. Кограничный оператор этого комплекса задается в степени p соотношением

$$(d\alpha)_{i_0 \ldots i_{p+1}} = \sum (-1)^k \alpha_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{p+1}},$$

причем в правой части подразумеваются *ограничения* соответствующих элементов на множество $M_{i_0 \ldots i_{p+1}}$, на котором все они имеют смысл.

Группы когомологий комплекса $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ мы обозначим через

$$H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}).$$

Если задан гомоморфизм $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, то очевидным образом определяется гомоморфизм симплициальных комплексов $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to$ $\to C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{B})$ и, следовательно, гомоморфизм

$$f^*: H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n(\mathfrak{M}; \mathcal{B}).$$

5.2. Резольвента, определенная покрытием.

Рассмотрим покрытие $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ пространства X. Для любого открытого множества $U \subset X$ положим

$$\mathfrak{M} \cap U = (M_i \cap U)_{i \in I}.$$

При этом получается покрытие пространства U с тем же множеством индексов, что и $\mathfrak{M}$, открытое, если $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие.

Рассмотрим теперь заданный предпучок $\mathcal{A}$ и образуем для всякого открытого в X множества U комплекс

$$C^*(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A}) = C^*(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A} \mid U),$$

который получается при сопоставлении каждому симплексу S нерва покрытия $\mathfrak{M}$ абелевой группы $\mathcal{A}(M_S \cap U)$. Для $V \subset U$ и любого S имеем гомоморфизм ограничения $\mathcal{A}(M_S \cap U) \to \mathcal{A}(M_S \cap V)$ и, следовательно, гомоморфизм системы коэффициентов на нерве покрытия $\mathfrak{M}$, определенной множеством U, в систему коэффициентов, определенную множеством V. Отсюда получается гомоморфизм

$$C^*(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A}) \to C^*(\mathfrak{M} \cap V; \mathcal{A})$$

симплициальных комплексов, причем выполняются обычные условия транзитивности. Следовательно, для любого целого $n \geqslant 0$ отображения

$$U \to C^n(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$$

определяют *предпучок* с базой X, который мы будем обозначать через $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$. Ясно, что $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = (\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$ является дифференциальным предпучком с базой X и даже предпучком со значениями в категории симплициальных коцепных комплексов.

Покажем теперь, что если $\mathcal{A}$ — *пучок*, то предпучок $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ также является *пучком* для любого покрытия $\mathfrak{M}$. Действительно, для любого подмножества M в X отображение $U \to \mathcal{A}(M \cap U)$ определяет, очевидно, пучок с базой X. С другой стороны, так как предпучок $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ есть не что иное, как отображение

$$U \to \coprod_{\dim(s)=n} \mathcal{A}(M_s \cap U),$$

то он является *прямым произведением* пучков (п. 1.10), что и доказывает утверждение.

Отсюда следует, что если $\mathcal{A}$ — *пучок*, то имеет место формула

$$\boxed{C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))}$$

для *любого* покрытия $\mathfrak{M}$ пространства X.

Предыдущая формула позволяет ввести для любого семейства Φ носителей в X комплекс

$$C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$$

при условии, что $\mathcal{A}$ является *пучком*. Это, очевидно, множество коцепей α покрытия $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathcal{A}$, обладающих следующим свойством: существует такое множество $T \in \Phi$, что для любого сингулярного симплекса s нерва $\mathfrak{M}$ сечение $\alpha_s \in \mathcal{A}(M_s)$ равно нулю вне $T \cap M_s$. Ясно, что $C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ является, как и $C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$, симплициальным коцепным комплексом. Его группы когомологий будем обозначать через

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}).$$

Вернемся к дифференциальному пучку $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$, связанному с пучком $\mathcal{A}$ и некоторым покрытием $\mathfrak{M}$. Имеется канонический гомоморфизм

$$j : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(\mathfrak{M}; \mathcal{A}),$$

при котором каждому $\alpha \in \mathcal{A}(U)$ сопоставляется 0-коцепь $j(\alpha)$ степени 0 для $\mathfrak{M} \cap U$, определяемая соотношением

$j(\alpha)_i =$ ограничению сечения α на $M_i \cap U$.

Ясно, что $d \circ j = 0$.

Теорема 5.2.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — либо открытое, либо замкнутое и локально конечное покрытие. Тогда для любого пучка $\mathcal{A}$ последовательность пучков и гомоморфизмов*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \ldots$$

точна, т. е. $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$.

То, что j — мономорфизм, следует из аксиомы (F1) для пучков, а соотношение $\operatorname{Im}(j) = \operatorname{Ker}(d)$ — из аксиомы (F2), если $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие, и из теоремы 1.3.1, если $\mathfrak{M}$ — замкнутое локально конечное покрытие. Остается доказать, что $\operatorname{Im}(d) = \operatorname{Ker}(d)$ в степенях $n \geqslant 1$. Для этого рассмотрим аннулируемый оператором d росток α коцепи степени n в некоторой точке x. Росток α можно „представить“ коциклом $\alpha \in C^n(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$, где U — достаточно малая окрестность точки x.

Если $\mathfrak{M}$ открыто, то можно взять $U \subset M_i$ для некоторого индекса i и тогда, очевидно, $U \cap M_{ii_0 \ldots i_{n-1}} = U \cap M_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ для любых $i_0, \ldots, i_{n-1}$. Следовательно, можно определить коцепь $\beta \in C^{n-1}(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$, положив

$$\beta_{i_0 \ldots i_{n-1}} = \alpha_{ii_0 \ldots i_{n-1}}.$$

Тогда

$$(d\beta)_{i_0 \ldots i_n} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \alpha_{ii_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_n}.$$

Но из $d\alpha = 0$ следует, что

$$\alpha_{i_0 \ldots i_n} - \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \alpha_{ii_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_n} = 0$$

в $U \cap M_{ii_0 \ldots i_n} = U \cap M_{i_0 \ldots i_n}$. Значит, $d\beta = \alpha$, что доказывает теорему для рассмотренного случая.

Если теперь $\mathfrak{M}$ — замкнутое локально конечное покрытие, то можно предположить, взяв U достаточно малым, что $\mathfrak{M}$ конечно и что $x \in M_i$ для всех i (для этого достаточно заменить $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M} \cap U$). Так как x принадлежит всем множествам M_s, то можно рассмотреть значение $\alpha_s(x) \in \mathcal{A}(x)$ сечения α_s в точке x. Из того, что $d\alpha = 0$, следует, в частности, что

$$\sum (-1)^k \alpha_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}}(x) = 0.$$

Выберем затем произвольно индекс i и положим

$$\beta_{i_0 \ldots i_{n-1}}(x) = \alpha_{ii_0 \ldots i_{n-1}}(x).$$

В силу конечности числа индексов i можно считать U настолько малым, что так определенные ростки сечений продолжаются до сечений

$$\beta_{i_0 \ldots i_{n-1}} \in \mathcal{A}(M_{i_0 \ldots i_{n-1}}),$$

определяющих коцепь $\beta \in C^{n-1}(\mathfrak{M} \cap U; \mathcal{A})$. Те же вычисления, что и в случае открытого покрытия, показывают, что сечения, определяющие $d\beta$ и α, совпадают в точке x. В силу конечности числа этих сечений можно предполагать, что $(d\beta)_{i_0 \ldots i_n} = \alpha_{i_0 \ldots i_n}$ в $U \cap M_{i_0 \ldots i_n}$, т. е. что $d\beta = \alpha$, и, таким образом, завершается доказательство во втором случае.

Предшествующий результат имеет важные следствия. Заметим сначала, что из него вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — либо открытое, либо замкнутое и локально конечное покрытие пространства X. Для любого пучка $\mathcal{A}$ имеет место канонический изоморфизм*

$$H^0(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A}) = H^0(X; \mathcal{A}).$$

С другой стороны, имеется следующий результат.

Теорема 5.2.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — покрытие пространства X, $\mathcal{A}$ — пучок с базой X, Φ — семейство носителей в X. Для того чтобы*

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = 0 \quad \textit{для } n \geqslant 1,$$

достаточно выполнение одного из следующих условий:

(a) *покрытие $\mathfrak{M}$ открыто, семейство Φ произвольно, пучок $\mathcal{A}$ — вялый;*

(b) *покрытие $\mathfrak{M}$ открыто, семейство Φ — паракомпактифицирующее, пучок $\mathcal{A}$ — Φ-тонкий;*

(c) *покрытие $\mathfrak{M}$ замкнуто и локально конечно, семейство Φ — паракомпактифицирующее, пучок $\mathcal{A}$ — Φ-мягкий.*

В случае (a) достаточно (теорема 3.1.3) проверить, что пучки $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ являются вялыми. Так как произведение вялых пучков является вялым пучком, то достаточно убедиться в том, что для любого открытого множества M пучок $U \to \mathcal{A}(M \cap U)$ — вялый; последнее же очевидно.

В случае (b) замечаем, что $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ является модулем над пучком колец $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, который по предположению является Φ-мягким пучком. Значит, $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ является Φ-тонким пучком, откуда следует утверждение.

В случае (c) достаточно показать, что $\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ — Φ-мягкий пучок. Так как этот пучок есть не что иное, как пучок

$$U \to \prod \mathcal{A}(M_s \cap U),$$

и так как M_s *замкнуто*, то

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) = \prod_{\dim(s)=n} \mathcal{A}_{M_s}.$$

Пучки $\mathcal{A}_{M_s}$ являются Φ-мягкими пучками (теорема 3.5.5), а рассматриваемое выше прямое произведение их локально конечно. Отсюда следует (п. 3.5) доказываемый результат.

Дадим в заключение еще одно следствие из теоремы 5.2.1. Так как $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ есть резольвента пучка $\mathcal{A}$ при соответствующих предположениях относительно $\mathfrak{M}$, то применимы результаты п. 4.7 и, следовательно, *существует канонический гомоморфизм*

$$H^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^*_\Phi(X; \mathcal{A}),$$

определенный для любого пучка $\mathcal{A}$, произвольного семейства носителей Φ и покрытия $\mathfrak{M}$ (либо открытого, либо замкнутого и локально конечного) пространства X.

Напомним, что для построения этого гомоморфизма нужно образовать двойной комплекс

$$K = C^*_\Phi(X; \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})) \quad .$$

и рассмотреть очевидные гомоморфизмы

$$C^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''} K \xleftarrow{j'} C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}),$$

из которых получаются гомоморфизмы

$$H^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j''} H^*(K) \xleftarrow{j'} H^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}).$$

Так как $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$, то j'' — изоморфизм, что и позволяет при помощи j' определить искомый гомоморфизм.

Можно, разумеется, получить более точный результат, вычисляя вторую спектральную последовательность комплекса K. Напомним, что в этой спектральной последовательности

$$E_2^{pq} = H^p\left[H_\Phi^q\left(X;\ \mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})\right)\right].$$

Как мы увидим сейчас, эту группу можно полностью вычислить в том случае, когда $\mathfrak{M}$ является *замкнутым локально конечным* покрытием. Действительно, в этом случае

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) = \bigoplus_{\dim(s)=n} \mathcal{A}_{M_s},$$

причем эта сумма *локально конечна*. Предполагая для простоты, что Φ — семейство всех замкнутых множеств, имеем (теорема 4.4.4)

$$H^q\left(X;\ \mathcal{C}^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})\right) = \prod_{\dim(s)=n} H^q\left(X;\ \mathcal{A}_{M_s}\right) = \prod H^q(M_s;\ \mathcal{A}).$$

Рассмотрим теперь на нерве покрытия $\mathfrak{M}$ *систему коэффициентов*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{A}):\ S \to H^q(M_S;\ \mathcal{A}),$$

операторы ограничения в которой определены очевидным образом. Мы имеем

$$H^q\left(X;\ \mathcal{C}^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})\right) = C^n\left(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^q(\mathcal{A})\right).$$

Так как этот изоморфизм совместим, очевидно, с соответствующими симплициальными структурами, то отсюда вытекает, что

$$E_2^{pq} = H^p\left(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^q(\mathcal{A})\right).$$

Другими словами, доказана следующая теорема.

Теорема 5.2.4. (Лере.) *Пусть $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ — замкнутое локально конечное покрытие пространства X и $\mathcal{A}$ — пучок с базой X. Рассмотрим на нерве покрытия $\mathfrak{M}$ системы коэффициентов*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{A}):\ S \to H^q(M_S;\ \mathcal{A}).$$

Тогда существует спектральная последовательность, для которой

$$E_2^{pq} = H^p\left(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^q(\mathcal{A})\right)$$

и член E_∞ которой является биградуированной группой, связанной с надлежащей фильтрацией градуированной группы $H^*(X;\ \mathcal{A})$.

Отсюда, в частности, выводится следующий результат.

Следствие[1]). *Пусть* $\mathfrak{M}=(M_i)$ — *замкнутое локально конечное покрытие пространства* X. *Предположим, что*

$$H^q(M_{i_0\ldots i_p}; \mathcal{A})=0$$

для всех $q \geqslant 1$ *и любых* $i_0, \ldots, i_p$. *Тогда канонический гомоморфизм*

$$H^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^*(X; \mathcal{A})$$

является изоморфизмом.

Мы увидим в дальнейшем, что аналогичные результаты имеют место и для открытых покрытий, но их нельзя получить использованным выше методом.

5.3. Спектральная последовательность, связанная с покрытием и дифференциальным пучком.

Пусть $\mathfrak{M}$ — покрытие пространства X и $\mathcal{L}^*=(\mathcal{L}^n)$ — дифференциальный пучок с базой X. Изучим двойной комплекс

$$C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)=\sum C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^q).$$

Ясно, что для его второй спектральной последовательности имеем

$$''E_1^{pq}=H^q(C^*(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^p))=H^q(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^p),$$

откуда

$$\boxed{''E_2^{pq}=H^p(H^q(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)).}$$

Имеем, с другой стороны,

$$'E_1^{pq}=H^q(C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)).$$

Поскольку

$$C^p(\mathfrak{M}; \mathcal{L}^*)=\prod \mathcal{L}^*(M_s),$$

то

$$'E_1^{pq}=\prod_{\dim(s)=p} H^q(\mathcal{L}^*(M_s)).$$

[1]) Результаты этого рода можно, очевидно, доказывать и без использования теории спектральных последовательностей; см. Weil A., Sur les théorèmes de de Rham, *Comm. Math. Helv.*, **26** (1952), 119—145. В статье Вейля рассматривается случай *простого* пучка $\mathcal{A}$, но метод тривиальным образом распространяется на общий случай.

Рассмотрим теперь на нерве покрытия $\mathfrak{M}$ *систему коэффициентов* [1])

$$\boxed{\mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*): \ S \to H^q(\mathscr{L}^*(M_S))}$$

с очевидными операциями „ограничения". Тогда получаем

$$'E_1^{pq} = C^p(\mathfrak{M};\ \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)),$$

причем это отождествление, очевидно, преобразует дифференциал d_1 спектральной последовательности в естественный дифференциал комплекса $C^*(\mathfrak{M};\ \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*))$. Поэтому имеем канонические изоморфизмы

$$\boxed{'E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{M};\ \mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)).}$$

Предположим теперь, что покрытие $\mathfrak{M}$ является либо открытым, либо замкнутым и локально конечным. Тогда во второй спектральной последовательности имеем член

$$\boxed{''E_2^{p\,0} = H^p(\Gamma(\mathscr{L}^*))}$$

и гомоморфизм

$$j''^* : H^p(\Gamma(\mathscr{L}^*)) \to H^p(C^*(\mathfrak{M};\ \mathscr{L}^*)),$$

индуцируемый каноническим вложением

$$j'' : \Gamma(\mathscr{L}^*) \to C^*(\mathfrak{M};\ \mathscr{L}^*).$$

Заметим, что так как первая градуировка двойного комплекса $C^*(\mathfrak{M};\ \mathscr{L}^*)$ положительна, то вторая фильтрация всегда регулярна. Следовательно, j''^* будет изоморфизмом, если вторая спектральная последовательность вырождена, в частности, если пучки $\mathscr{L}^q$ являются вялыми (теорема 5.2.3).

В случае когда нужно принимать во внимание некоторое семейство Φ носителей, имеют место аналогичные результаты при соответствующих предположениях относительно $\mathfrak{M}$ и Φ (а именно, нужно, чтобы для любого $S \in \Phi$ существовало такое $S' \in \Phi$, что всякое M_i, имеющее непустое пересечение с S, содержится в S'). Мы оставляем читателю детальное изучение этого вопроса, так как на практике такая ситуация встречается редко.

[1]) Не следует смешивать *систему коэффициентов* $\mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)$ *на нерве покрытия* $\mathfrak{M}$ с *производным пучком* $\mathscr{H}^q(\mathscr{L}^*)$, который мы определили в п. 4.1, хотя мы и обозначаем их одним и тем же символом.

5.4. Соотношения между когомологиями покрытия и пространства.

Мы применим сейчас результаты предшествующего пункта к случаю, когда $\mathscr{L}^*$ является *резольвентой* данного пучка $\mathscr{A}$, и, в частности, к случаю, когда $\mathscr{L}^*$ — *каноническая резольвента* $\mathscr{C}^*(X; \mathscr{A})$ пучка $\mathscr{A}$.

Так как $\mathscr{L}^*$ — резольвента, то имеется канонический гомоморфизм $j: \mathscr{A} \to \mathscr{L}^*$ и, следовательно, гомоморфизм комплексов

$$j': C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{A}) \to C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L}^*),$$

являющийся, впрочем, мономорфизмом [образ группы $C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{A})$ состоит из элементов второй степени 0, аннулируемых оператором d'']. Этот гомоморфизм определяет гомоморфизмы

$$\boxed{j'^*: H^n(\mathfrak{M}; \mathscr{A}) \to H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L}^*)),}$$

которые можно определить также следующим образом.

Первая спектральная последовательность содержит члены

$$'E_2^{n\,0} = H^n(\mathfrak{M}; \mathscr{H}^0(\mathscr{L}^*)).$$

Но так как $\mathscr{L}^*$ — резольвента пучка $\mathscr{A}$, то имеем каноническое отождествление $\mathscr{H}^0(\mathscr{L}^*) = \mathscr{A}$ и, следовательно,

$$\boxed{'E_2^{n\,0} = H^n(\mathfrak{M}; \mathscr{A}).}$$

Поскольку градуировки рассматриваемого двойного комплекса положительны, то существует канонический гомоморфизм

$$'E_2^{n\,0} \to H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L}^*)),$$

что и дает снова гомоморфизм j'^*.

Предположим, что $\mathscr{L}^*$ — *каноническая резольвента* пучка $\mathscr{A}$ и что покрытие $\mathfrak{M}$ *открыто*. В силу теоремы 5.2.3 вторая спектральная последовательность

$$''E_2^{pq} = H^p(H^q(\mathfrak{M}; \mathscr{L}^*))$$

вырождена. Следовательно, гомоморфизмы

$$j''^*: H^n(\Gamma(\mathscr{L}^*)) \to H^n(C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{L}^*))$$

являются изоморфизмами. Но по определению имеем

$$H^n(\Gamma(\mathscr{L}^*)) = H^n(X; \mathscr{A}),$$

откуда следуют канонические изоморфизмы

$$H^n(X;\ \mathcal{A}) = H^n(C^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)).$$

Учитывая j^*, получаем гомоморфизмы

$$\boxed{H^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H^n(X;\ \mathcal{A}),}$$

которые, очевидно, являются *естественными*.

Вернемся теперь к первой спектральной последовательности. Так как множества M_S открыты и так как $\mathcal{L}^*$ является канонической резольвентой пучка $\mathcal{A}$, то по лемме 4.9.1 имеются изоморфизмы

$$H^q(\mathcal{L}^*(M_s)) = H^q(M_s;\ \mathcal{A}).$$

Мы получаем, таким образом, следующий результат.

Теорема 5.4.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие пространства X и $\mathcal{A}$ — пучок с базой X. Рассмотрим на нерве покрытия $\mathfrak{M}$ систему коэффициентов*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{A}):\ S \to H^q(M_S;\ \mathcal{A})$$

для $q = 0, 1, \ldots$. Тогда существует спектральная последовательность, для которой E_2 задается формулой

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^q(\mathcal{A})),$$

а член E_∞ является биградуированной группой, связанной с надлежащей фильтрацией градуированной группы $H^*(X;\ \mathcal{A})$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие пространства X, $\mathcal{A}$ — пучок с базой X. Для того чтобы канонические гомоморфизмы*

$$H^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H^n(X;\ \mathcal{A})$$

были изоморфизмами, достаточно, чтобы для любого симплекса S нерва покрытия $\mathfrak{M}$ имело место равенство

$$H^q(M_S;\ \mathcal{A}) = 0 \quad \textit{при } q \geqslant 1.$$

Покажем, как можно явно вычислить гомоморфизм $H^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to$ $\to H^n(X;\ \mathcal{A})$. Обозначим для этого через $\xi_{\mathfrak{M}}$ и ξ_X классы когомологий, соответствующие друг другу при этом гомоморфизме, и представим их коциклами

$$\zeta_{\mathfrak{M}} \in C^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A});\ \zeta_X \in C^n(X;\ \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{L}^n).$$

Если отождествить эти коциклы с коциклами двойного комплекса $C^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)$ бистепени $(n,\ 0)$ и $(0,\ n)$ соответственно, то задача сво-

дится к выражению того факта, что эти коциклы отличаются только на кограницу, т. е. к нахождению элементов

$$\lambda^{p, q} \in C^p(\mathfrak{M};\ \mathscr{L}^q) \quad (p+q=n-1),$$

удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathfrak{M}} &= d'\lambda^{n-1, 0} \\ 0 &= d'\lambda^{n-2, 1} + d''\lambda^{n-1, 0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= d'\lambda^{0, n-1} + d''\lambda^{1, n-2} \\ \zeta_X &= \qquad\qquad d''\lambda^{0, n-1}. \end{aligned}$$

Но $\zeta_{\mathfrak{M}}$ — это семейство сечений $\zeta_{i_0 \ldots i_n} \in \mathscr{A}(M_{i_0 \ldots i_n})$. С другой стороны, $\lambda^{p, q}$ должны быть семействами сечений

$$\lambda_{i_0 \ldots i_p} \in \mathscr{L}^q(M_{i_0 \ldots i_p}) = C^q(M_{i_0 \ldots i_p};\ \mathscr{A}).$$

Так как дифференциал d'' в бистепени (p, q) индуцирован с точностью до множителя $(-1)^p$ дифференциалом d пучка $\mathscr{L}^*$, то остается решить следующую систему:

$$\begin{aligned} \zeta_{i_0 \ldots i_n} &= \sum (-1)^k \lambda_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_n}; \\ 0 &= \sum (-1)^k \lambda_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n-1}} + (-1)^{n-1} d\lambda_{i_0 \ldots i_{n-1}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \lambda_{i_1} - \lambda_{i_0} - d\lambda_{i_0 i_1}; \\ \zeta_X &= \qquad\qquad d\lambda_{i_0}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, нужно поступать следующим образом. Исходя из n-коцикла $\zeta_{\mathfrak{M}} = \zeta$ покрытия $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathscr{A}$, следует записать ζ в виде кограницы некоторой $(n-1)$-коцепи λ^{n-1} на $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathscr{L}^0$. Тогда коцепь $d\lambda^{n-1}$ на $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathscr{L}^1$ является коциклом и, следовательно, кограницей некоторой $(n-2)$-коцепи λ^{n-2} на $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathscr{L}^1$. Точно так же $d\lambda^{n-2}$ есть кограница некоторой $(n-3)$-коцепи λ^{n-3} со значениями в $\mathscr{L}^2$. Продолжая это построение, доходим до 1-коцепи $d\lambda^1$ со значениями в $\mathscr{L}^{n-1}$, являющейся коциклом и, следовательно, кограницей некоторой 0-коцепи λ^0 со значениями в $\mathscr{L}^{n-1}$. Тогда $d\lambda^0$ является коциклом покрытия $\mathfrak{M}$ со значениями в $\mathscr{L}^n$, т. е. *сечением пучка $\mathscr{L}^n$ над X*. Кроме того, это сечение аннулируется дифференциалом $d: \mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^{n+1}$ и, следовательно, определяет некоторый класс $\xi_X \in H^n(\Gamma(\mathscr{L}^*))$. Этот класс как раз и является образом класса $\xi_{\mathfrak{M}}$ при каноническом гомоморфизме $H^n(\mathfrak{M};\ \mathscr{A}) \to H^n(X;\ \mathscr{A})$.

Мы изучили выше двойной комплекс

$$K = C^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}))$$

для случая, когда $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие, и в этих условиях определили канонические гомоморфизмы $H^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H^n(X;\ \mathcal{A})$.

Возьмем в более общем случае некоторое семейство Φ носителей и покрытие $\mathfrak{M}$, которое либо открыто, либо замкнуто и локально конечно, и образуем двойной комплекс

$$K = C^*_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^*(X,\ \mathcal{A})).$$

Существуют гомоморфизмы

$$H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \xrightarrow{j''} H^n(K) \xleftarrow{j'} H^n_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}),$$

возникающие из двух спектральных последовательностей комплекса K. Для этих спектральных последовательностей, очевидно, имеем

$$''E_2^{pq} = H^p\left(H^q_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}))\right),$$

$$'E_1^{pq} = H^q\left(C^p_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}))\right).$$

Так как $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})$ является вялой резольвентой пучка $\mathcal{A}$, то

$$''E_2^{pq} = 0 \quad \text{для } q \neq 0$$

в тех случаях, когда можно применять теорему 5.2.3, т. е. когда $\mathfrak{M}$ — открытое покрытие и Φ произвольно или же когда $\mathfrak{M}$ — замкнутое локально конечное покрытие и Φ — паракомпактифицирующее семейство. Значит, в этих случаях j'' — изоморфизм, и мы снова получаем канонические гомоморфизмы

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}).$$

Заметим, что если $\mathfrak{M}$ — замкнутое локально конечное покрытие, то указанный выше метод позволяет определить эти гомоморфизмы только для паракомпактифицирующего семейства Φ. Однако в п. 5.2 мы получили аналогичные гомоморфизмы без каких-либо предположений относительно Φ. Мы увидим в следующем пункте, что во всех случаях, когда оба метода применимы одновременно, гомоморфизмы, к которым они приводят, *совпадают*.

В случае когда $\mathfrak{M}$ — замкнутое локально конечное покрытие и Φ — семейство всех замкнутых подмножеств в X, примененный здесь метод дает некоторую спектральную последовательность, сходную (и, как мы увидим, совпадающую) с той, которая вытекает из теоремы 5.2.4. При этом нужно предполагать, что основное пространство X *паракомпактно*. Действительно, рассмотрим двойной комплекс

$$K = C^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})).$$

Достаточно вычислить член $'E_2^{pq}$ его первой спектральной последовательности. Мы видели, что

$$'E_1^{pq} = H^q\left(C^p\left(\mathfrak{M};\ \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})\right)\right).$$

Полагая для упрощения

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}),$$

имеем

$$C^p(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}^*) = \prod_{\dim(s)=p} \mathcal{A}^*(M_s).$$

Следовательно,

$$'E_1^{pq} = \prod_{\dim(s)=p} H^q(\mathcal{A}^*(M_s)).$$

Но так как X паракомпактно, а M_s *замкнуто* и, следовательно, паракомпактно, то $\mathcal{A}^*$ индуцирует на M резольвенту пучка $\mathcal{A}_s \mid M_s$, состоящую из мягких пучков, так что получаем

$$'E_1^{pq} = \prod_{\dim(s)=p} H^q(M_s;\ \mathcal{A}) = C^p\left(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^q(\mathcal{A})\right)$$

и окончательно

$$'E_2^{pq} = H^p\left(\mathfrak{M};\ \mathcal{H}^q(\mathcal{A})\right),$$

что мы и утверждали.

5.5. Свойства совместимости.

В п. 5.2 и 5.4 мы дали два метода, позволяющие при некоторых предположениях определить гомоморфизмы

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}).$$

В этом пункте мы покажем, что эти методы приводят к одинаковым гомоморфизмам.

Пусть $\mathcal{A}$ — пучок с базой X, $\mathcal{L}^*$ — каноническая резольвента пучка $\mathcal{A}$, Φ — некоторое семейство носителей и $\mathfrak{M}$ — покрытие пространства X. Рассматриваемые гомоморфизмы определяются при помощи двойных комплексов

$$C^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})) \quad \text{и} \quad C^*_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*).$$

Рассмотрим градуированный пучок

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*) = (\mathcal{C}^p(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^q))$$

с „полной“ градуировкой и „полным“ дифференциалом. Его составляющей степени n является, таким образом, пучок

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{C}^p(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^q).$$

Имеем гомоморфизмы дифференциальных пучков

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \xrightarrow{j'} \mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*) \xleftarrow{j''} \mathcal{L}^*.$$

Если эти три пучка являются *резольвентами* пучка $\mathcal{A}$, то в силу теоремы 4.7.2 получим *коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
H^n[\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}))] \arrow[r, "j'^*"] \arrow[dr] & H^n[\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*))] \arrow[d] & H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \arrow[l, "j''^*"'] \arrow[dl] \\
 & H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}), &
\end{tikzcd}$$

т. е. следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[dr] & H^n(C^*_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)) \arrow[d] & H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \arrow[l, "j''^*"'] \arrow[dl] \\
 & H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}). &
\end{tikzcd}$$

Ясно, что тогда результат, который мы имеем в виду, будет доказан, так как известно, что если $\mathcal{L}^*$ — каноническая резольвента пучка $\mathcal{A}$, то гомоморфизм $H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A})$, фигурирующий в этой диаграмме, тождественен (см. пример 4.8.1).

Но по предположению $\mathcal{L}^*$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$. Тем же свойством обладает $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})$, если $\mathfrak{M}$ — либо открытое, либо замкнутое и локально конечное покрытие пространства X. Поэтому остается доказать, что при этих предположениях дифференциальный пучок $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)$ также является резольвентой пучка $\mathcal{A}$. Покажем, что гомоморфизм $\mathcal{L}^* \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)$ индуцирует изоморфизм производных пучков пучка $\mathcal{L}^*$ на производные пучки пучка $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)$. Для этого рассмотрим в каждой точке x „точечный“ двойной комплекс $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)(x)$ ростков сечений в точке x дифференциального пучка $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^*)$. Так как $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^p)$ есть резольвента пучка $\mathcal{L}^p$ для всех p, то $H^q[\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^p)(x)] = 0$ для $q \geqslant 1$, так что для рассматриваемого двойного комплекса получаем вырожденную спектральную последовательность. В силу того что

$$H^0[\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{L}^p)(x)] = \mathcal{L}^p(x),$$

сформулированное утверждение доказано.

Заметим, с другой стороны, что предшествующее рассуждение показывает, что вместо *канонической резольвенты* пучка $\mathcal{A}$ для определения гомоморфизмов $H^n_\Phi(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A})$ можно использовать *любую* резольвенту, приводящую к когомологиям пространства X со значениями в $\mathcal{A}$.

В рамках тех же идей можно поставить следующий вопрос. Предположим, что X паракомпактно, $\mathfrak{M}$ — замкнутое и локально конечное покрытие пространства X. Взяв в качестве Φ семейство всех замкнутых подмножеств в X, можно применить одновременно методы п. 5.2 и 5.4. В обоих случаях получаются спектральные последовательности, которые начинаются с групп

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{M}; \mathscr{H}^p(\mathscr{A}))$$

и дают в пределе когомологии пространства X со значениями в $\mathscr{A}$. Являются ли эти спектральные последовательности „изоморфными"?

Для доказательства изоморфизма рассмотрим наряду с двойными комплексами

$$K' = C^*(X; \mathscr{C}^*(\mathfrak{M}; \mathscr{A})), \quad K'' = C^*(\mathfrak{M}; \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A})),$$

использованными при построении упомянутых спектральных последовательностей, тройной комплекс

$$K = C^*[X; \mathscr{C}^*(\mathfrak{M}; \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A}))]$$

и очевидные гомоморфизмы

$$K' \xrightarrow{\theta'} K \xleftarrow{\theta''} K''$$

[член комплекса K' бистепени (p, q) отображается на аналогичный член комплекса K тройной степени $(p, q, 0)$, а член комплекса K'' бистепени (q, r) — на аналогичный член комплекса K тройной степени $(0, q, r)$]. Если ввести в K фильтрацию с помощью второй степени, то θ' и θ'' будут совместимы с фильтрациями комплексов K' и K'', использованными при построении спектральных последовательностей, так что получаем для всех s гомоморфизмы

$$\theta'^* : E_s^{pq}(K') \to E_s^{pq}(K),$$
$$\theta''^* : E_s^{pq}(K'') \to E_s^{pq}(K).$$

Поставленная задача будет решена, если показать, что эти гомоморфизмы являются изоморфизмами. Достаточно, впрочем, сделать это для $s = 2$.

Обозначим через d', d'', d''' три частных дифференциала комплекса K. Ясно, что

$$E_1^{pq}(K) = H^q\{C^*[X; \mathscr{C}^p(\mathfrak{M}; \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A}))]\},$$

где справа стоят когомологии, вычисленные при помощи дифференциала $d' + d'''$. Таким образом, если ввести дифференциальные пучки

$${}^p\mathscr{L}^* = \mathscr{C}^p(\mathfrak{M}; \mathscr{C}^*(X; \mathscr{A})),$$

то нужно вычислить когомологии полной степени q двойного комплекса $C^*(X;\ {}^p\mathscr{L}^*)$. Но так как пучок

$$ {}^p\mathscr{L}^* = \prod_{\dim(s)=p} \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{A})_{M_s} $$

является *тонким*, то вычисления п. 4.5 показывают, что канонические гомоморфизмы

$$ \Gamma({}^p\mathscr{L}^*) = C^p(\mathfrak{M};\ \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{A})) \to C^*(X;\ {}^p\mathscr{L}^*) = K $$

индуцируют *изоморфизмы*

$$ E_1^{pq}(K) = H^q(\Gamma({}^p\mathscr{L}^*)) = H^q\left[C^p(\mathfrak{M};\ \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{A}))\right]. $$

В силу результатов п. 5.3, примененных в случае канонической резольвенты, находим отсюда, что

$$ E_1^{pq}(K) = C^p(M;\ \mathscr{H}^q(\mathscr{A})), $$

где $\mathscr{H}^q(\mathscr{A})$ — система коэффициентов $S \to H^q(M_S;\ \mathscr{A})$ на нерве покрытия $\mathfrak{M}$. Отсюда получаем

$$ E_2^{pq}(K) = H^p(\mathfrak{M};\ \mathscr{H}^q(\mathscr{A})), $$

что завершает доказательство.

5.6. Пример приложения: когомологии объединения [1]).

Пусть X является объединением двух подпространств M_0 и M_1. Будем предполагать их открытыми или замкнутыми одновременно. Предполагаем также во избежание тривиальностей, что M_0, M_1 и $M_{01} = M_0 \cap M_1$ *не пусты*. Пусть $\mathscr{A}$ — пучок с базой X.

Рассмотрим покрытие $\mathfrak{M}$ пространства X, состоящее из M_0 и M_1; его нервом является симплициальная схема Δ_1. Для вычисления когомологий пространства X со значениями в $\mathscr{A}$ имеем, следовательно, спектральную последовательность, в которой

$$ E_2^{pq} = H^p(\Delta_1;\ \mathscr{H}^q). $$

Система коэффициентов $\mathscr{H}^q$ вычисляется, очевидно, следующим образом: если $s = (i_0, \ldots, i_p)$ — p-мерный сингулярный симплекс схемы Δ_1, то

$$ \mathscr{H}^q(s) = H^q(M_0;\ \mathscr{A}) \quad \text{для} \quad s = (0, \ldots, 0), $$
$$ \mathscr{H}^q(s) = H^q(M_1;\ \mathscr{A}) \quad \text{для} \quad s = (1, \ldots, 1), $$
$$ \mathscr{H}^q(s) = H^q(M_{01};\ \mathscr{A}) \text{ в остальных случаях.} $$

[1]) Содержание этого пункта не имеет значения для понимания последующих пунктов. Получаемый результат является обобщением классической теоремы Виеториса.

В случае, когда M_i открыты, это следует из теоремы 5.4.1, а в случае, когда M_i замкнуты — из конца п. 5.2 (заметим, что предположение о паракомпактности не является необходимым).

Так как симплициальная схема Δ_1 имеет размерность 1, то ясно, что

$$E_2^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad p \geqslant 2 \quad \text{и} \quad q \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что дифференциалы d_r спектральной последовательности тривиальны для каждого $r \geqslant 2$, так что получаем канонические изоморфизмы

$$E_\infty^{pq} = E_2^{pq}.$$

Так как, кроме того, $E_\infty^{pq} = 0$ для $p \geqslant 2$, то отсюда следует, что *для всякого n имеет место точная последовательность*

$$\boxed{0 \to E_2^{1,\,n-1} \to H^n(X;\ \mathcal{A}) \to E_2^{0,\,n} \to 0.}$$

Остается вычислить члены $E_2^{0,\,n}$ и $E_2^{1,\,n-1}$ в явном виде. Имеем

$$E_2^{0,\,n} = H^0(\Delta_1;\ \mathcal{H}^n).$$

Значит, эта группа состоит из 0-коциклов схемы Δ_1 со значениями в системе коэффициентов $\mathcal{H}^n$. Мы имеем

$$C^0(\Delta_1;\ \mathcal{H}^n) = H^n(M_0;\ \mathcal{A}) \times H^n(M_1;\ \mathcal{A}),$$

причем если $\alpha = (\alpha_i)_{i=0,\,1}$ — коцепь степени 0, то $d\alpha$ есть элемент группы $H^n(M_0 \cap M_1;\ \mathcal{A})$, являющийся разностью между „ограничениями“ классов α_0 и α_1 на $M_0 \cap M_1$. Отсюда следует, что

$E_2^{0,\,n}$ есть подгруппа группы $H^n(M_0;\ \mathcal{A}) \times H^n(M_1;\ \mathcal{A})$, образованная теми парами (α_0, α_1), которые индуцируют один и тот же класс когомологий в $M_0 \cap M_1$.

Вычислим теперь группу $E_2^{1,\,n-1} = H^1(\Delta_1;\ \mathcal{H}^{n-1})$. Это можно сделать с помощью *альтернированных* коцепей схемы Δ_1 степени 1. Такая коцепь является всегда коциклом и отождествляется с элементом группы $H^{n-1}(M_0 \cap M_1;\ \mathcal{A})$. Она является кограницей тогда и только тогда, когда представима в виде разности двух классов, индуцированных классами когомологий пространств M_0 и M_1. Иначе говоря,

$E_2^{1,\,n-1}$ есть фактор-группа группы $H^{n-1}(M_0 \cap M_1;\ \mathcal{A})$ по подгруппе, образованной теми классами когомологий, которые являются разностями двух классов, индуцированных классами когомологий пространств M_0 и M_1.

Читателю оставляется явное вычисление гомоморфизмов, фигурирующих в написанной выше точной последовательности, и воспроизведение их элементарными (т. е. без использования какой-либо спектральной последовательности) средствами.

5.7. Переход к более мелкому покрытию.

Пусть $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ и $\mathfrak{N} = (N_j)_{j \in J}$ — два покрытия пространства X. Если $\mathfrak{N}$ вписано в $\mathfrak{M}$, то *симплициальным отображением* покрытия $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ мы будем называть всякое отображение $\theta : J \to I$, для которого

$$N_j \subset M_{\theta(j)}$$

при всех j. Любое такое отображение определяет некоторое симплициальное отображение нерва покрытия $\mathfrak{N}$ в нерв покрытия $\mathfrak{M}$, но обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и θ заданы; рассмотрим предпучок $\mathcal{A}$ с базой X. Будем предполагать, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — открытые покрытия, если $\mathcal{A}$ не является пучком. Тогда имеем гомоморфизм симплициальных комплексов

$$\theta^* : C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$$

для любого семейства Φ носителей в X. Для определения этого гомоморфизма достаточно сопоставить каждой коцепи α покрытия $\mathfrak{M}$ степени n коцепь $\theta^*(\alpha)$, заданную следующим образом:

$$\theta^*(\alpha)_{j_0 \ldots j_n} = \text{ограничению элемента } \alpha_{\theta(j_0) \ldots \theta(j_n)} \text{ на}$$
$$\text{множество } N_{j_0 \ldots j_n} \subset M_{\theta(j_0) \ldots \theta(j_n)}.$$

Ясно, что имеем даже гомоморфизм *предпучков*

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{N}; \mathcal{A}),$$

совместимый с их очевидными „симплициальными структурами".

Теорема 5.7.1. *Пусть θ_0 и θ_1 — симплициальные отображения покрытия $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$. Тогда гомоморфизмы θ_0^* и θ_1^* симплициально гомотопны.*

Мы используем здесь результаты п. 3.7 гл. I. Рассмотрим для этого комплекс $I^* = C^*(\Delta_1; \mathbf{Z})$ целочисленных сингулярных коцепей симплициальной схемы Δ_1. Мы должны построить гомоморфизм

$$C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to I^* \times C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}), \tag{1}$$

композиции которого с каноническими гомоморфизмами

$$j_0, j_1 : I^* \times C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \tag{2}$$

дают θ_0^* и θ_1^*. Образуем для этого покрытие

$$\overline{\mathfrak{N}} = (N_{\varepsilon, j}),$$

где ε пробегает Δ_1, j пробегает J, $N_{\varepsilon, j} = N_j$ для любых ε и j. Покрытия $\overline{\mathfrak{N}}$ и $\mathfrak{N}$ эквивалентны [1]), но не совпадают, и нерв покрытия $\overline{\mathfrak{N}}$ является, очевидно, декартовым произведением схемы Δ_1 на нерв покрытия $\mathfrak{N}$. Имеем, кроме того, канонический изоморфизм

$$I^* \times C^*_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) = C^*_\Phi(\overline{\mathfrak{N}}; \mathcal{A}), \tag{3}$$

определяемый следующим образом. Возьмем коцепи $\lambda \in C^p(\Delta_1; \mathbf{Z})$ и $\nu \in C^p_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$. Для любых заданных p-мерных сингулярных симплексов s и t схемы Δ_1 и нерва покрытия $\mathfrak{N}$ имеем, очевидно,

$$N_{s,t} = N_t.$$

Тогда гомоморфизм (3) преобразует элемент $\lambda \times \nu$ степени p левого комплекса в коцепь $\lambda \times \nu \in C^p_\Phi(\overline{\mathfrak{N}}; \mathcal{A})$, определяемую формулой

$$(\lambda \times \nu)_{s,t} = \lambda(s) \cdot \nu_t. \tag{4}$$

После этого легко проверяется, что при отождествлении (3) гомоморфизмы (2) определяются симплициальными отображениями покрытия $\mathfrak{N}$ в $\overline{\mathfrak{N}}$, а именно отображениями

$$\varphi_0 : j \to (0, j) \quad \text{и} \quad \varphi_1 : j \to (1, j).$$

Рассмотрим теперь симплициальные отображения θ_0 и θ_1 покрытия $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$. Они определяют симплициальное отображение θ покрытия $\overline{\mathfrak{N}}$ в $\mathfrak{M}$, а именно отображение $(\varepsilon, j) \to \theta_\varepsilon(j)$, и, следовательно, гомоморфизм

$$\theta^* : C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\overline{\mathfrak{N}}; \mathcal{A}).$$

Тривиальным образом проверяется, что

$$\varphi^*_\varepsilon \circ \theta^* = (\theta \circ \varphi_\varepsilon)^* = \theta^*_\varepsilon.$$

Следовательно, после отождествления (3) гомоморфизм θ^* играет роль искомого гомоморфизма (1), что и доказывает теорему.

Пользуясь вычислениями п. 3.7 гл. I, можно найти явный вид соответствующего оператора гомотопии. Этот оператор переводит коцепь α степени n покрытия $\mathfrak{M}$ в коцепь $D\alpha$ степени $(n-1)$ покрытия $\mathfrak{N}$, заданную формулой

$$D(\alpha)_{j_0 \ldots j_{n-1}} = \sum (-1)^k \alpha_{\theta_0(j_0) \ldots \theta_0(j_k)\theta_1(j_k) \ldots \theta_1(j_{n-1})},$$

[1]) Покрытия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ пространства X называются эквивалентными, если они вписаны друг в друга, т. е. если существуют симплициальные отображения $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$. — *Прим. ред.*

причем в правой части подразумеваются ограничения указанных элементов на $N_{j_0 \ldots j_n}$.

Заметим, с другой стороны, что в предшествующем рассуждении покрытия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ можно заменить на $\mathfrak{M} \cap U$ и $\mathfrak{N} \cap U$, где U — произвольное открытое в X множество. Таким образом, теорема применима не только к коцепным комплексам, но и к соответствующим *предпучкам* $\mathcal{C}^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})$ и $\mathcal{C}^*(\mathfrak{N};\ \mathcal{A})$.

Предшествующая теорема показывает, что для любого семейства Φ носителей в X можно определить *канонические* гомоморфизмы

$$\boxed{H_\Phi^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \to H_\Phi^n(\mathfrak{N};\ \mathcal{A}),}$$

а если имеется третье покрытие $\mathfrak{P}$, вписанное в $\mathfrak{N}$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_\Phi^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_\Phi^n(\mathfrak{N};\ \mathcal{A}) \arrow[dl] \\
& H_\Phi^n(\mathfrak{P};\ \mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

будет, очевидно, коммутативной.

Если $\mathcal{A}$ — пучок, а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — либо открытые, либо замкнутые и локально конечные покрытия (впрочем, не нужно предполагать, что оба покрытия имеют один и тот же тип), *то диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
H_\Phi^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_\Phi^n(\mathfrak{N};\ \mathcal{A}) \arrow[dl] \\
& H_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Это следует из теоремы 4.7.2, касающейся гомоморфизмов резольвент.

Наконец, если два покрытия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *эквивалентны*, то имеем канонические изоморфизмы

$$H_\Phi^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) = H_\Phi^n(\mathfrak{N};\ \mathcal{A}).$$

Достаточно выбрать некоторые симплициальные отображения $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ и $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, и тогда в силу теоремы 5.7.1 отображения $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ будут определять в когомологиях тождественные отображения, откуда и следует утверждение.

В частности, *если покрытие $\mathfrak{M}$ тривиально* (т. е. если $M_i = X$ для какого-нибудь i), *то* $H_\Phi^n(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) = 0$ *для каждого* $n \geqslant 1$ *и любого* $\mathcal{A}$, так как $\mathfrak{M}$ эквивалентно покрытию, состоящему из единственного множества X, когомологии которого легко вычисляются.

5.8. Когомологии Чеха.

Результаты предшествующего пункта наводят на мысль о переходе к индуктивному пределу групп $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ или же комплексов $C^*_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$. Мы покажем сейчас, как это надо делать.

Рассмотрим *множество* $\mathfrak{R}(X)$ *открытых* покрытий пространства X вида

$$\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}, \quad \text{где} \quad x \in U_x \quad \text{для любого } x.$$

В нем можно ввести *отношение порядка*, считая $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{V}$ тогда и только тогда, когда $U_x \subset V_x$ для любого x.

Если $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{V}$, то имеем *каноническое* симплициальное отображение покрытия $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$, а именно отображение $x \to x$, и таким образом получаем *канонический* гомоморфизм

$$C^*_\Phi(\mathfrak{V}; \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$$

симплициальных коцепных комплексов для любого семейства Φ носителей в X. Этот гомоморфизм определяет, разумеется, гомоморфизмы

$$H^n_\Phi(\mathfrak{V}; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}),$$

изученные в предыдущем пункте.

Очевидно, можно образовать комплекс

$$\boxed{\check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = \varinjlim_{\mathfrak{R}(X)} \operatorname{ind} C^*_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}).}$$

Он называется *комплексом коцепей Чеха пространства X с носителями в Φ и значениями в предпучке $\mathcal{A}$*. Это, очевидно, *симплициальный коцепной комплекс*. Группы

$$\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^n(\check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A})) = \lim_{\mathfrak{R}(X)} \operatorname{ind} H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$$

называются *группами когомологий Чеха пространства X* с носителями в Φ и значениями в $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — какое-либо *открытое* покрытие пространства X (или даже, если $\mathcal{A}$ — пучок, покрытие, в которое можно вписать некоторое открытое покрытие). Имеем тогда канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to \check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}).}$$

Для их определения выберем покрытие $\mathfrak{U} \in \mathfrak{R}(X)$, вписанное в $\mathfrak{M}$, и рассмотрим композицию канонических гомоморфизмов

$$H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \quad \text{и} \quad H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \to \check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}).$$

Тогда получится гомоморфизм нужного вида. Остается доказать, что он не зависит от выбора покрытия $\mathfrak{U}$. Заменим $\mathfrak{U}$ покрытием $\mathfrak{V} \in \mathfrak{R}(X)$, вписанным в $\mathfrak{M}$. Существует покрытие $\mathfrak{W} \in \mathfrak{R}(X)$, удовлетворяющее условиям $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$, $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V}$, и требуемый результат непосредственно вытекает из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \arrow[dr] & H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^n_\Phi(\mathfrak{V}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\
 & H^n_\Phi(\mathfrak{W}; \mathcal{A}). &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, имеют место следующие результаты (мы рассматриваем только открытые покрытия, если $\mathcal{A}$ — предпучок, и покрытия, в которые можно вписать открытые, если $\mathcal{A}$ — пучок):

(a) *Если $\mathfrak{N}$ вписано в $\mathfrak{M}$, то диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A}) \arrow[dl] \\
 & \check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

(b) *Для того чтобы элемент группы $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ аннулировался в $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$, необходимо и достаточно, чтобы он аннулировался в $H^n_\Phi(\mathfrak{N}; \mathcal{A})$, где $\mathfrak{N}$ — подходящим образом выбранное покрытие, вписанное в $\mathfrak{M}$.*

(c) *Объединение образов групп $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ есть вся группа $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$.*

Можно, следовательно, сказать, что в некотором смысле группа $\check{H}^n_\Phi(X; \mathcal{A})$ является „индуктивным пределом“ групп $H^n_\Phi(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$, когда $\mathfrak{M}$ пробегает „множество“ (не являющееся на самом деле таковым) „всех“ открытых покрытий пространства X. Разумеется, для вычисления групп Чеха можно ограничиться рассмотрением некоторой *фундаментальной системы* открытых покрытий пространства X. Например, если X квазикомпактно, то можно ограничиться группами когомологий *конечных* открытых покрытий пространства X.

Отметим также, переходя к другому кругу идей, следующий результат, который будет позже нам полезен.

Теорема 5.8.1. *Пусть X — некоторое топологическое пространство, Φ — семейство носителей в X и предположим, что любое $S \in \Phi$ имеет некоторую окрестность, принадлежащую Φ. Тогда функтор $\mathcal{A} \to \check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A})$ преобразует любую точную последовательность предпучков в точную последовательность комплексов.*

Пусть

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

— точная последовательность предпучков. Тогда для любого открытого U соответствующая последовательность

$$0 \to \mathcal{A}'(U) \to \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}''(U) \to 0$$

точна и, следовательно, для каждого *открытого* покрытия $\mathfrak{U}$ имеем точную последовательность комплексов

$$0 \to C^*(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}') \to C^*(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}) \to C^*(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}'') \to 0,$$

откуда в пределе получаем точную последовательность

$$0 \to \check{C}^*(X;\ \mathcal{A}') \to \check{C}^*(X;\ \mathcal{A}) \to \check{C}^*(X;\ \mathcal{A}'') \to 0.$$

Если ограничиваться коцепями с носителями в Φ, то ясно, что эта последовательность остается точной слева. Значит, остается показать, что гомоморфизмы

$$\check{C}^p_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \to \check{C}^p_\Phi(X;\ \mathcal{A}'')$$

являются эпиморфизмами.

Возьмем для этого некоторый элемент α'' правого комплекса, представленный в покрытии $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$ коцепью β'' с носителем $S \in \Phi$, и пусть $T \in \Phi$ — некоторая окрестность множества S.

Мы можем в случае необходимости заменить $\mathfrak{U}$ покрытием $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{U}$ и потому будем предполагать выполненным условие:

(a) *$U_x \subset T$ для всех $x \in S$.*

С другой стороны, каждая точка $x \in X \setminus S$ обладает такой открытой окрестностью V_x, что для любого p-мерного сингулярного симплекса s нерва покрытия $\mathfrak{U}$ элемент β''_s индуцирует 0 в $U_s \cap V_x$. Снова в случае необходимости изменяя $\mathfrak{U}$, можно считать, что $V_x = U_x$. Но если $s = (x_0, \ldots, x_p)$, то имеем $U_s \subset U_{x_k}$ для всех k. Отсюда следует, что можно предполагать выполненным условие:

(b) *Если не все вершины симплекса $s = (x_0, \ldots, x_p)$ принадлежат S, то $\beta''_s = 0$.*

Ввиду этого для каждого s существует элемент β_s из $\mathcal{A}(U_s)$, который отображается в β''_s при заданном гомоморфизме $\mathcal{A} \to \mathcal{A}''$. Более того, можно предполагать, что $\beta_s = 0$, если $\alpha_s = 0$, т. е., в силу (b), если не все вершины симплекса s принадлежат S. В силу (a) ясно, что при этом определяется коцепь $\beta \in C^p(\mathfrak{U};\ \mathcal{A})$ *с носителем в* Φ, представляющая β'', и теорема доказана.

Из предшествующей теоремы следует, что имеется *точная последовательность когомологий Чеха* для всякой точной последовательности *предпучков* и всякого семейства Φ носителей с упомянутым

выше свойством. Мы увидим позже, что если семейство Φ — *паракомпактифицирующее*, то также имеется точная последовательность когомологий Чеха для любой точной последовательности *пучков*.

5.9. Спектральная последовательность, связанная с когомологиями Чеха.

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — *пучок* с базой X. Если заданы открытые покрытия $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$, причем $\mathfrak{B}$ вписано в $\mathfrak{U}$, то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[dr] & H^n(\mathfrak{B}; \mathcal{A}) \arrow[d] \\ & H^n(X; \mathcal{A}). \end{tikzcd}$$

В частности, беря покрытия из $\mathfrak{R}(X)$ и переходя к индуктивному пределу, приходим к каноническим гомоморфизмам

$$\boxed{\check{H}^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A}).}$$

Мы выведем их сейчас из некоторой спектральной последовательности.

Пусть $\mathcal{L}^* = \mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ — каноническая резольвента пучка $\mathcal{A}$; образуем двойной комплекс

$$\check{C}^*(X; \mathcal{L}^*) = \sum \check{C}^p(X; \mathcal{L}^q).$$

Имеем канонические гомоморфизмы

$$\check{C}^*(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{j'} \check{C}^*(X; \mathcal{L}^*) \xleftarrow{j''} \Gamma(\mathcal{L}^*).$$

С другой стороны, получаются следующие спектральные последовательности. Имеем, очевидно,

$$''E_2^{pq} = H^p(\check{H}^q(X; \mathcal{L}^*)) = 0 \quad \text{для} \quad q \geqslant 1$$

в силу теоремы 5.2.3. Далее,

$$'E_1^{pq} = H^q(\check{C}^p(X; \mathcal{L}^*)).$$

Но функтор $\mathcal{F} \to \check{C}^p(X; \mathcal{F})$ точен на *категории предпучков* Отсюда следует, что если ввести на X *предпучки*

$$\mathcal{H}^q: \ U \to H^q(\mathcal{L}^*(U)) = H^q(U; \mathcal{A}),$$

то получим

$$'E_1^{pq} = \check{C}^p(X; \mathcal{H}^q), \quad 'E_2^{pq} = \check{H}^p(X; \mathcal{H}^q).$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.9.1. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — пучок с базой X. Рассмотрим предпучки*

$$\mathcal{H}^q(X;\ \mathcal{A}):\quad U \to H^q(U;\ \mathcal{A}).$$

Тогда существует спектральная последовательность, для которой

$$E_2^{pq} = \check{H}^p(X;\ \mathcal{H}^q(X;\ \mathcal{A})),$$

а член E_∞ является биградуированной группой, связанной с надлежащей фильтрацией градуированной группы $H^*(X;\ \mathcal{A})$.

Заметим, что $\mathcal{H}^0(X;\ \mathcal{A}) = \mathcal{A}$, и, следовательно,

$$''E_2^{p0} = \check{H}^p(X;\ \mathcal{A}).$$

Отсюда, очевидно, снова получаются гомоморфизмы, определенные выше.

Следствие. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — пучок с базой X. Канонический гомоморфизм*

$$\check{H}^n(X;\ \mathcal{A}) \to H^n(X;\ \mathcal{A})$$

является изоморфизмом для $n = 0, 1$ и мономорфизмом для $n = 2$.

При $n = 0$ это утверждение тривиально. В силу теории спектральных последовательностей два других утверждения будут установлены, если показать, что

$$\check{H}^0(X;\ \mathcal{H}^1(X;\ \mathcal{A})) = 0.$$

Но *пучок, порожденный предпучком $\mathcal{H}^q(X;\ \mathcal{A})$, является нулевым для $q \geqslant 1$* (так как локально всякий коцикл из $\mathcal{L}^*$ является границей). Остается поэтому доказать следующее.

Лемма. *Если предпучок $\mathcal{F}$ порождает нулевой пучок, то*

$$\check{H}^0(X;\ \mathcal{F}) = 0 \quad \text{и даже} \quad \check{C}^0(X;\ \mathcal{F}) = 0.$$

Действительно, рассмотрим произвольную коцепь $\alpha \in \check{C}^0(X;\ \mathcal{F})$. В покрытии $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$ она будет представлена семейством (α_x), где $\alpha_x \in \mathcal{F}(U_x)$. Так как $\mathcal{F}$ порождает нулевой пучок, то каждая точка x имеет открытую окрестность $V_x \subset U_x$, в которой α_x индуцирует 0. Заменяя $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{B} = (V_x)$, получаем требуемый результат.

Все предшествующие результаты распространяются на случай произвольного семейства Φ носителей, удовлетворяющего условию, которое сформулировано в теореме 5.8.1 (каждое $S \in \Phi$ имеет окрестность, принадлежащую Φ). При этом нет нужды изменять что-либо в самом рассуждении. Достаточно приписать индекс Φ ко всем рассматриваемым группам.

Теорема 5.9.1 имеет и другое следствие, особенно полезное в алгебраической геометрии [1]).

Теорема 5.9.2. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — пучок с базой X. Предположим, что можно покрыть X семейством $\mathbf{U}$ открытых множеств, обладающим следующими свойствами:*

(a) *Если $\mathbf{U}$ содержит U' и U'', то оно содержит $U' \cap U''$;*

(b) *$\mathbf{U}$ содержит произвольно малые открытые множества;*

(c) *$\check{H}^q(U; \mathcal{A}) = 0$ для всех $q \geqslant 1$ и $U \in \mathbf{U}$.*

В этих условиях гомоморфизмы $\check{H}^q(X; \mathcal{A}) \to H^q(X; \mathcal{A})$ являются изоморфизмами.

Мы покажем сейчас индукцией по n, что гомоморфизмы $\check{H}^n(U; \mathcal{A}) \to \to H^n(U; \mathcal{A})$ являются изоморфизмами для всякого $U \in \mathbf{U}$. Отсюда будет следовать справедливость теоремы. Действительно, в силу (a) и (b) при вычислении групп $\check{C}^*(X; \mathcal{H}^q)$ можно использовать такие покрытия $(U_x)_{x \in X}$, что всегда $U_{x_0 \ldots x_n} \in \mathbf{U}$. В силу (c) и высказанного выше утверждения имеем соотношение $\check{C}^*(X; \mathcal{H}^q) = 0$ для $q \geqslant 1$. Теперь теорема следует из теоремы 5.9.1, так как соответствующая спектральная последовательность вырождена.

Итак, предположим доказанным, что $H^q(U; \mathcal{A}) = 0$ для $0 < q < n$ и $U \in \mathbf{U}$. Отсюда следует, что $\check{C}^*(X; \mathcal{H}^q) = 0$ для $0 < q < n$. Иначе говоря, спектральная последовательность теоремы 5.9.1 удовлетворяет условию

$$E_2^{pq} = 0 \quad \text{для} \quad 0 < q < n \quad \text{и} \quad p \geqslant 0.$$

Отсюда, пользуясь общей теорией спектральных последовательностей, получаем, что канонический гомоморфизм

$$E_2^{n\,0} = \check{H}^n(X; \mathcal{A}) \to H^n(X; \mathcal{A})$$

является изоморфизмом. Применяя теперь этот результат к пучку над $U \in \mathbf{U}$, индуцированному пучком $\mathcal{A}$, и семейству $\mathbf{U}'$, которое состоит из множеств $U' \in \mathbf{U}$, содержащихся в U, получаем, что гомоморфизм $\check{H}^n(U; \mathcal{A}) \to H^n(U; \mathcal{A})$ является изоморфизмом. Доказательство закончено.

5.10. Теорема об изоморфизме.

Мы можем теперь сформулировать основной результат настоящего параграфа.

Теорема 5.10.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A}$ — пучок с базой X и Φ — паракомпактифицирующее семейство*

[1]) Этот результат принадлежит А. Картану.

в X. Канонические гомоморфизмы

$$\check{H}^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \to H^n_\Phi(X;\ \mathcal{A})$$

являются изоморфизмами.

В силу теоремы 5.9.1 этот результат вытекает из следующего результата.

Теорема 5.10.2. *Пусть X — топологическое пространство, Φ — паракомпактифицирующее семейство в X, $\mathcal{A}$ — предпучок с базой X. Имеем $\check{H}^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}) = 0$ для любого $n \geqslant 0$, если пучок, порожденный предпучком $\mathcal{A}$, является нулевым.*

Мы покажем прежде всего, что любой класс когомологий $\xi \in \check{H}^n_\Phi(X;\ \mathcal{A})$ можно представить коциклом надлежащего *локально конечного* покрытия $\mathfrak{U}$. Затем мы покажем, что любая *коцепь* этого покрытия становится нулевой при переходе к надлежащим образом выбранному вписанному в него покрытию. Тем самым теорема будет доказана [заметим, что мы не доказываем равенства $\check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}) = 0$].

Итак, рассмотрим ξ. Существует такое открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, что ξ представляется коциклом α покрытия $\mathfrak{U}$ с носителем $S \in \Phi$. Возьмем окрестность $S' \in \Phi$ множества S. Можно, очевидно, предположить, что все U_i, имеющие непустое пересечение с S, содержатся в S'. Обозначим через I_0 множество тех i, для которых $U_i \cap S \neq \phi$.

Так как S — носитель коцикла α, то каждая точка $x \in X \setminus S$ имеет такую окрестность $V(x)$, что α_s индуцирует 0 в $U_s \cap V(x)$ для любого симплекса s покрытия $\mathfrak{U}$. Заменяя $\mathfrak{U}$ вписанным в него покрытием, можно предположить, что каждое $U_i\,(i \notin I_0)$ содержится в одном из $V(x)$, и, следовательно, можно считать, что $\alpha_s = 0$, когда не все вершины симплекса s принадлежат I_0. Ясно, что ξ представлен уже коциклом (с носителем S) покрытия, состоящего из $U_i\,(i \in I_0)$, и открытого множества $X \setminus S$. Иначе говоря, *можно предположить, что существует такой индекс $o \in I$, что $U_o = X \setminus S$ и $U_i \subset S'$ для $i \neq o$.*

Так как S' *паракомпактно*, то существует его открытое локально конечное покрытие, вписанное в $\mathfrak{U} \cap S'$. Можно предположить, что одно из множеств этого нового покрытия есть $S' \setminus S$, а другие содержатся в $U_i\,(i \neq o)$ и, следовательно, открыты в X. *Можно, таким образом, считать $\mathfrak{U}$ локально конечным покрытием. Аналогичное рассуждение* показывает, что *можно предположить существование такого открытого покрытия $(V_i)_{i \in I}$, что $\overline{V}_i \subset U_i$ для всех $i \in I$.* Этим завершается первая часть доказательства.

Рассмотрим открытое *локально конечное покрытие* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ и предположим, что существует открытое покрытие $(V_i)_{i \in I}$, для

которого $\overline{V}_i \subset U_i$. Мы докажем сейчас (без каких-либо предположений относительно X и не обращаясь к семейству Φ), что любая коцепь покрытия $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathcal{A}$ индуцирует 0 на некотором покрытии, вписанном в $\mathfrak{U}$. Действительно, возьмем для любой точки x открытую окрестность W_x, имеющую непустое пересечение лишь с конечным числом множеств U_i. Можно, очевидно, предположить выполненными следующие условия:

(a) *соотношение* $x \in U_i$ *влечет за собой* $W_x \subset U_i$;

(b) *соотношение* $x \in V_i$ *влечет за собой* $W_x \subset V_i$;

(c) *имеем* $x \in U_i$, *если* $W_x \cap V_i \neq \phi$.

С другой стороны, так как предпучок $\mathcal{A}$ порождает нулевой пучок, то любая точка $x \in U_s$ имеет окрестность, на которой α_s индуцирует 0. Эта окрестность может быть выбрана независимо от s, так как $\mathfrak{U}$ — локально конечное покрытие. Можно, следовательно, предполагать выполненным условие:

(d) *если* $x \in U_s$, *то* $\alpha_s = 0$ *в* W_x.

Выберем теперь некоторое симплициальное отображение φ покрытия $\mathfrak{W} = (W_x)$ в покрытие $\mathfrak{V} = (V_i)$. Это отображение можно рассматривать также как симплициальное отображение покрытия $\mathfrak{W}$ в $\mathfrak{U}$. Мы покажем сейчас, что $\varphi^*(\alpha) = 0$.

Пусть $(x_0, \ldots, x_n)$ — сингулярный симплекс нерва покрытия $\mathfrak{W}$. Полагая $i_k = \varphi(x_k)$, видим, что $\varphi^*(\alpha)_{x_0 \ldots x_n}$ является ограничением элемента $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ на множество

$$W_{x_0} \cap \ldots \cap W_{x_n}.$$

Так как это множество не пусто, то $W_{x_0} \cap W_{x_k} \neq \phi$ и тем более $W_{x_0} \cap V_{i_k} \neq \phi$, так что $x_0 \in U_{i_0 \ldots i_n}$ в силу условия (c). По условию (a) имеем $W_{x_0} \subset U_{i_0 \ldots i_n}$. Тогда в силу условия (d) $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ индуцирует 0 на W_{x_0} и тем более на $W_{x_0 \ldots x_n}$, что и завершает доказательство.

Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ — предпучок с базой X и Φ — паракомпактифицирующее семейство в X. Канонические гомоморфизмы*

$$\check{H}^p_\Phi(X; \mathcal{A}) \to \check{H}^p_\Phi(X; \tilde{\mathcal{A}})$$

являются изоморфизмами (через $\tilde{\mathcal{A}}$ обозначен пучок, порожденный предпучком $\mathcal{A}$).

Действительно, имеются, очевидно, точные последовательности предпучков

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{A} \to \mathcal{J} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{J} \to \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{Q} \to 0\ [1])$$

[1]) Автор рассматривает здесь предпучки $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}\varphi$, $\mathcal{J} = \operatorname{Im}\varphi$, $\mathcal{Q} = \operatorname{Coker}\varphi$, где φ: $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ — канонический гомоморфизм предпучков. — *Прим. перев.*

и, следовательно (теорема 5.8.1), точные последовательности когомологий Чеха. Так как предпучки $\mathcal{N}$ и $\mathfrak{G}$ порождают 0, то сформулированный результат следует из предыдущей теоремы.

Пример 5.10.1. Возьмем в качестве $\mathcal{A}$ предпучок $U \to A$, где A — фиксированная абелева группа. Мы видим, что когомологии Чеха со значениями в простом *пучке* с базой X и слоем A вычисляются при помощи коцепей со значениями в рассматриваемом *предпучке*. Иначе говоря, они сводятся к классическим группам Чеха $\check{H}^n_\Phi(X; A)$.

Замечание 5.10.1. Можно дать доказательство теоремы об изоморфизме, отличное от изложенного выше.

Рассмотрим семейство дифференциальных пучков $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$, где $\mathfrak{U}$ пробегает множество $\mathfrak{R}(X)$. Ясно, что можно определить дифференциальный пучок

$$\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A}) = \lim_{\mathfrak{R}(X)} \operatorname{ind} \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}).$$

Так как мы имеем индуктивный предел резольвент пучка $\mathcal{A}$, то при этом получается также резольвента пучка $\mathcal{A}$.

Заметим теперь, что для каждого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства X пучок $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}; \mathbf{Z})$ является пучком колец, а $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ есть $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}; \mathbf{Z})$-модуль. Чтобы убедиться в этом, достаточно определить произведение любых коцепей $\zeta \in C^0(\mathfrak{U}; \mathbf{Z})$ и $\alpha \in C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ с помощью формулы

$$(\zeta\alpha)_{i_0 \ldots i_n} = \zeta_{i_0}\alpha_{i_0 \ldots i_n}$$

и аналогичным образом поступить в локальном случае.

Переходя к пределу, мы видим, что $\check{\mathcal{C}}^n(X; \mathcal{A})$ есть модуль над пучком колец $\check{\mathcal{C}}^0(X; \mathbf{Z})$. Но сразу ясно, что $\check{\mathcal{C}}^0(X; \mathbf{Z}) = \mathcal{C}^0(X; \mathbf{Z})$. Следовательно, пучок $\check{\mathcal{C}}^0(X; \mathbf{Z})$ является вялым и, в частности, Φ-мягким для любого паракомпактифицирующего семейства Φ в X. Отсюда видно, что в случае паракомпактифицирующего семейства Φ пучок $\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A})$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$, состоящей из Φ-тонких пучков, откуда, в свою очередь, следует существование канонического изоморфизма

$$H^n_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^n[\Gamma_\Phi(\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A}))].$$

Если X *компактно*, а Φ — семейство всех замкнутых подмножеств из X, то, кроме того, в силу теоремы 3.10.1 имеем

$$\Gamma_\Phi(\check{\mathcal{C}}^*(X; \mathcal{A})) = \lim \operatorname{ind} \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})) = \\ = \lim \operatorname{ind} C^*_\Phi(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) = \check{C}^*_\Phi(X; \mathcal{A}),$$

что сразу дает теорему об изоморфизме в этом частном случае.

Для произвольного паракомпактифицирующего семейства Φ предшествующее рассуждение, как легко заметить, сохраняет свое значение (хотя теорема 3.10.1 уже не применима). Читателю предоставляется возможность завершить доказательство в качестве упражнения. Мы получили, таким образом, другое доказательство теоремы об изоморфизме.

Заметим, что формула

$$\Gamma(\check{\mathcal{C}}^*(X;\ \mathcal{A})) = \check{C}^*(X;\ \mathcal{A})$$

верна и в том случае, когда X — *пространство Зариского*, так как в этом случае теорема 3.10.1 применима. Следовательно, градуированная группа $\check{H}^*(X;\ \mathcal{A})$ является в этом случае пределом спектральной последовательности, второй член которой задается формулой

$$E_2^{pq} = H^p\left[H^q(X;\ \check{\mathcal{C}}^*(X;\ \mathcal{A}))\right] = \lim_{\mathfrak{R}(X)} \operatorname{ind} H^p\left[H^q(X;\ \mathcal{C}(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}))\right]$$

(мы используем теорему 4.12.1 для пространств Зариского). К сожалению, не представляется возможным вычислить эту спектральную последовательность более явным образом, даже если заменить $\mathfrak{R}(X)$ семейством всех *конечных* открытых покрытий пространства X (что возможно в силу рассуждений п. 5.7).

5.11. Точная последовательность для когомологий Чеха.

Пусть Φ — паракомпактифицирующее семейство в X. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0.$$

Обозначим через $\mathcal{A}_0''$ *предпучок*, являющийся образом пучка $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{A}_0''(U) = \operatorname{Im}[\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}''(U)].$$

Комбинируя теорему 5.8.1, которая дает точную последовательность когомологий, связывающую $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0''$, со следствием из теоремы 5.10.2, получаем точную последовательность когомологий

$$\ldots \to \check{H}_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}') \to \check{H}_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}) \to \check{H}_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} \check{H}_\Phi^{n+1}(X;\ \mathcal{A}') \to \ldots.$$

Мы покажем сейчас, что с помощью изоморфизмов теоремы 5.10.1 *эта последовательность отождествляется с точной последовательностью*

$$\ldots \to H_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}') \to H_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}) \to H_\Phi^n(X;\ \mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H_\Phi^{n+1}(X;\ \mathcal{A}') \to \ldots,$$

существование которой было установлено в § 4.

Действительно, рассмотрим канонические резольвенты заданных пучков. Вторая точная последовательность получается из точной последовательности комплексов

$$0 \to C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}') \to C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \to C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}'') \to 0.$$

Кроме того, известно, что последовательность

$$0 \to \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}') \to \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}'') \to 0$$

является даже точной последовательностью *предпучков* (теорема 4.3.1). Следовательно, в силу теоремы 5.8.1, будем иметь коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A}')) & \to & \check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})) & \to & \check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A}'')) & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}') & \longrightarrow & C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}) & \longrightarrow & C^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}'') & \to 0, \end{array}$$

в которой вертикальные гомоморфизмы индуцируют изоморфизмы в когомологиях. Значит, точная последовательность когомологий из § 4 отождествляется с точной последовательностью когомологий рассматриваемых двойных комплексов.

Но с другой стороны, имеем также следующую коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}') & \longrightarrow & \check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}) & \longrightarrow & \check{C}^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}''_0) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & C^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A}')) & \to & C^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A})) & \to & C^*_\Phi(X;\ \mathcal{C}^*(X;\mathcal{A}'')) & \to 0, \end{array}$$

где $\mathcal{A}''_0$ — предпучок, являющийся образом пучка $\mathcal{A}$. Значит, точная последовательность когомологий, связывающая двойные комплексы, отождествляется с точной последовательностью когомологий Чеха, что доказывает, очевидно, наше утверждение.

Оператор δ легко вычисляется в когомологиях Чеха. Возьмем любой класс когомологий $\xi'' \in \check{H}^n_\Phi(X;\ \mathcal{A}'')$. В силу следствия из теоремы 5.10.2, ξ'' можно представить в надлежащем открытом покрытии $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ коциклом $\alpha'' \in C^n_\Phi(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}''_0)$. Теорема 5.8.1 показывает, что α'' можно считать образом некоторой коцепи $\alpha \in C^n_\Phi(\mathfrak{U};\ \mathcal{A})$ при гомоморфизме $\mathcal{A} \to \mathcal{A}''$. Коцепь $d\alpha \in C^{n+1}_\Phi(\mathfrak{U};\ \mathcal{A})$ обязательно принимает свои значения в $\mathcal{A}'$ и, следовательно, определяет некоторый элемент из $H^{n+1}_\Phi(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}')$, образ которого в $\check{H}^{n+1}_\Phi(X;\ \mathcal{A}')$ есть в точности $\delta\xi''$.

Рассмотрим, например, сечение $\xi'' \in \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') = \check{H}^0_\Phi(X;\ \mathcal{A}'')$ и найдем $\delta\xi''$. Для этого мы возьмем такое открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, что в каждом U_i сечение ξ'' поднимается до сечения $\xi_i \in \mathcal{A}(U_i)$ (это

возможно без каких-либо предположений о паракомпактности). Тем самым определяется некоторая 0-коцепь $\xi = (\xi_i)$ покрытия $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathcal{A}$. Если всякое $S \in \Phi$ обладает окрестностью, принадлежащей Φ (что имеет место в случае паракомпактифицирующего семейства или семейства всех замкнутых множеств), то можно, очевидно, предположить, что носитель коцепи ξ содержится в Φ.

Образуем теперь коцикл $d\xi$. Имеем

$$(d\xi)_{ij} = \xi_j - \xi_i \quad \text{в} \quad U_{ij}.$$

Разумеется, $d\xi$ является в действительности коциклом со значениями в $\mathcal{A}'$. Класс когомологий пространства X со значениями в $\mathcal{A}'$ и носителем в Φ, который он определяет, есть $\delta\xi''$. Для того чтобы он был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы, заменяя $\mathfrak{U}$ в случае необходимости вписанным в него покрытием, можно было найти такую 0-коцепь ξ' со значениями в $\mathcal{A}'$ и носителем в Φ, что $d\xi = d\xi'$. Это означает, как показывает замена коцепи (ξ_i) на $(\xi_i - \xi_i')$, что можно предполагать

$$\xi_i = \xi_j \quad \text{в} \quad U_{ij},$$

или, иначе говоря, что данное сечение ξ'' пучка $\mathcal{A}''$ поднимается *в целом* до сечения пучка $\mathcal{A}$ с носителем в Φ. Разумеется, этот результат выражает просто тот факт, что последовательность

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{A}'') \to \check{H}^1_\Phi(X;\ \mathcal{A}')$$

является точной.

Пример 5.11.1. Мы найдем сейчас явное выражение в когомологиях Чеха для точной последовательности, связанной с замкнутым подпространством F в X и его дополнением $X \setminus F$ (п. 4.10). Будем предполагать для простоты, что X паракомпактно, а Φ — семейство всех замкнутых подмножеств, так что нам придется рассматривать когомологии пространства $X \setminus F$ с носителями в семействе Φ, которое состоит из подмножеств пространства $X \setminus F$, *замкнутых в* X.

Запишем точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{A}_{X \setminus F} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_F \to 0$$

и вычислим соответствующие группы когомологий Чеха пространств $X \setminus F$, X и F.

Пусть $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$ — некоторое покрытие пространства X. Если s — сингулярный симплекс нерва покрытия $\mathfrak{U}$, то имеем каноническое отождествление

$$\mathcal{A}_F(U_s) = \mathcal{A}(U_s \cap F),$$

так как F *замкнуто* в X. Отсюда следует тотчас, что существует канонический изоморфизм

$$C^*(\mathfrak{U};\ \mathcal{A}_F) = C^*(\mathfrak{U} \cap F;\ \mathcal{A}),$$

имеющий место для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$. Можно ограничиться покрытиями, для которых $U_x \subset X \setminus F$, если $x \in X \setminus F$ [так как в упорядоченном множестве $\mathfrak{R}(X)$ они образуют фундаментальную систему]. Ясно, что $\mathfrak{U} \cap F$ для такого покрытия канонически эквивалентно покрытию $(U_x \cap F)_{x \in F}$ множества F. Переходя к индуктивному пределу, получаем канонический изоморфизм

$$\boxed{\check{C}^*(X;\ \mathcal{A}_F) = \check{C}^*(F;\ \mathcal{A}).}$$

Заметим, что этот результат имеет место без каких-либо предположений о паракомпактности. Иначе говоря, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.11.1. *Пусть F — замкнутое подпространство в X. Для всякого пучка $\mathcal{A}$ с базой X существуют канонические изоморфизмы*

$$\check{H}^n(X;\ \mathcal{A}_F) = \check{H}^n(F;\ \mathcal{A})$$

в когомологиях Чеха.

Этот результат полезно сопоставить со следствием из теоремы 4.9.1.

Мы перейдем теперь к интерпретации групп $\check{H}^n(X;\ \mathcal{A}_{X\setminus F})$, которые изоморфны группам $\check{H}^n_\Phi(X \setminus F;\ \mathcal{A})$ для паракомпактного пространства X (в силу теоремы 5.10.1, с одной стороны, и теоремы 4.10.1 — с другой), в качестве групп „относительных“ когомологий. Для этого введем следующие *предпучки*:

$$\mathcal{B}_{X\setminus F}(U) = \begin{cases} \mathcal{A}(U), & \text{если } U \subset X \setminus F \\ 0, & \text{если } U \cap F \neq \phi; \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_F(U) = \begin{cases} \mathcal{A}(U), & \text{если } U \cap F \neq \phi \\ 0, & \text{если } U \subset X \setminus F, \end{cases}$$

операторы ограничения в которых определяются с помощью операторов ограничения в $\mathcal{A}$. Имеется канонический мономорфизм предпучков

$$\mathcal{B}_{X\setminus F} \to \mathcal{A}_{X\setminus F}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{B}_{X\setminus F}$ порождает пучок $\mathcal{A}_{X\setminus F}$. Значит, если X паракомпактно, то имеем канонический изоморфизм

$$\check{H}^n(X;\ \mathcal{A}_{X\setminus F}) = \check{H}^n(X;\ \mathcal{B}_{X\setminus F}).$$

Рассмотрим теперь комплекс

$$\check{C}^*(X;\ \mathcal{B}_{X\setminus F}) = \lim_{\mathfrak{R}(X)} \operatorname{ind} C^*(\mathfrak{U};\ \mathcal{B}_{X\setminus F}).$$

Ясно, что $C^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{B}_{X\setminus F})$ есть подкомплекс в $C^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{A})$, образованный такими коцепями α, что

$$\alpha_s = 0, \quad \text{если} \quad U_s \cap F \neq \phi.$$

Иначе говоря, обозначим через $X_{\mathfrak{U}}$ симплициальную схему, которая получится, если ввести на X структуру нерва покрытия $\mathfrak{U}$ [напомним, что рассматриваются покрытия из $\mathfrak{R}(X)$], и через $F_{\mathfrak{U}}$ — симплициальную подсхему схемы $X_{\mathfrak{U}}$, определенную следующим образом: $(x_0, \ldots, x_n)$ — симплекс схемы $F_{\mathfrak{U}}$ тогда и только тогда, когда $U_{x_0 \ldots x_n}$ имеет непустое пересечение с F (отсюда следует, что все x_k принадлежат F, если предполагать, что $U_x \subset X \setminus F$ для всякого $x \in X \setminus F$). Тогда $C^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{B}_{X\setminus F})$ *состоит из коцепей симплициальной схемы* $X_{\mathfrak{U}}$ *со значениями в системе коэффициентов, индуцированной пучком* $\mathscr{A}$, *которые равны нулю на симплексах из* $F_{\mathfrak{U}}$. Поэтому естественно обозначить комплекс $C^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{B}_{X\setminus F})$ через

$$C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}};\ \mathscr{A}),$$

а предел комплексов $\check{C}^*(X;\ \mathscr{B}_{X\setminus F})$ — через

$$\check{C}^*(X \bmod F;\ \mathscr{A}).$$

Получаем теперь канонические изоморфизмы

$$\boxed{\check{H}^n_{\Phi}(X \setminus F;\ \mathscr{A}) = \check{H}^n(X \bmod F;\ \mathscr{A}),}$$

где Φ образовано подмножествами из $X \setminus F$, замкнутыми в X.

Предшествующие определения имеют, разумеется, смысл и в том случае, когда $\mathscr{A}$ — *предпучок*. Возьмем, например, фиксированную абелеву группу A и применим указанную выше процедуру к предпучку $U \to A$. Для всякого покрытия $\mathfrak{U} \in \mathfrak{R}(X)$ комплекс $C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}};\ A)$ будет состоять тогда из коцепей симплициальной схемы $X_{\mathfrak{U}}$, равных нулю на симплициальной схеме $F_{\mathfrak{U}}$, и обозначение $C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}};\ A)$ оказывается согласованным с соответствующим обозначением гл. I, п. 3.2. Иначе говоря, имеем

$$C^*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}};\ \mathscr{A}) = \operatorname{Hom}\,[C_*(X_{\mathfrak{U}} \bmod F_{\mathfrak{U}}),\ A]$$

в обозначениях гл. I, п. 3.2. Следовательно, *если X паракомпактно, $\mathscr{A}$ — простой пучок с базой X и слоем A, то имеют место канонические изоморфизмы*

$$\boxed{\check{H}^n_{\Phi}(X \setminus F;\ \mathscr{A}) = \check{H}^n(X \bmod F;\ A).}$$

Группы, фигурирующие в правой части, иногда называются в литературе *группами Лефшеца* пространства X по модулю F. Они известны давно, и их определение, очевидно, не базируется на теории пучков.

Таким образом, *если X паракомпактно*, то имеется точная последовательность когомологий вида

$$\ldots \to \check{H}^n(X;\ A) \to \check{H}^n(F;\ A) \to \check{H}^{n+1}(X \bmod F;\ A) \to \check{H}^{n+1}(X;\ A) \to \ldots$$

для замкнутого в X подпространства F и любой абелевой группы A. Эта точная последовательность, разумеется, отождествляется с точной последовательностью п. 4.10.

5.12. Когомологии Чеха и теория размерности.

Пусть X — *паракомпактное* пространство. Для того чтобы X имело когомологическую размерность $\leqslant n$ (см. п. 4.13 и 4.14), достаточно, чтобы

$$\check{H}^i(X;\ \mathcal{A}) = 0 \quad \text{для} \quad i > n$$

для любого пучка $\mathcal{A}$ над X. В свою очередь, для доказательства этого равенства *достаточно* построить произвольно мелкие открытые покрытия пространства X, для которых

$$H^i(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) = 0 \quad \text{для} \quad i > n.$$

Для вычисления групп $H^i(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})$ можно перейти от комплекса $C^*(\mathfrak{M};\ \mathcal{A})$ к его подкомплексу, состоящему из *альтернированных* коцепей (гл. I, п. 3.8). Но если коцепь

$$\alpha = (\alpha_{i_0 \ldots i_p})$$

альтернирована, то $\alpha_{i_0 \ldots i_p} = 0$, когда не все индексы $i_0, \ldots, i_p$ различны. Предположим теперь, что покрытие $\mathfrak{M}$ имеет *размерность* $\leqslant n$; это значит, что

$$M_{i_0 \ldots i_p} = \phi,$$

если $p > n$ и индексы $i_0, \ldots, i_p$ различны (т. е. нерв покрытия $\mathfrak{M}$ имеет размерность $\leqslant n$ как симплициальная схема). В этом случае любая альтернированная коцепь степени $p > n$ будет нулевой и тем более будем иметь $H^i(\mathfrak{M};\ \mathcal{A}) = 0$ для $i > n$.

Следовательно, *для того чтобы комологическая размерность пространства X была $\leqslant n$, достаточно, чтобы X допускало произвольно мелкие открытые покрытия размерности $\leqslant n$* Достаточно даже в силу теоремы 4.14.1, чтобы это свойство имело место „локально“.

Классическим, но не тривиальным результатом является выполнение этого свойства для всех компактных подпространств в $\mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что всякое компактное подпространство в $\mathbf{R}^n$ имеет размерность $\leqslant n$. Так как $\mathbf{R}^n$ локально компактно и паракомпактно, то отсюда следует, что оно само имеет размерность $\leqslant n$ (теорема 4.14.1). Так как $\mathbf{R}^n$ метризуемо, то отсюда вытекает, что любое (замкнутое или нет) его подпространство имеет размерность $\leqslant n$ (теорема 4.14.2). Применяя снова теорему 4.14.1, получаем окончательно следующий результат.

Теорема 5.13.1. *Для того чтобы паракомпактное пространство X имело когомологическую размерность $\leqslant n$, достаточно, чтобы всякая точка $x \in X$ имела окрестность, гомеоморфную подпространству из $\mathbf{R}^n$.*

§ 6. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ И $\cup$-ПРОИЗВЕДЕНИЕ

6.1. Декартово произведение двух классов когомологий.

Пусть X и Y — два топологических пространства, $\mathscr{L}^*$ — дифференциальный пучок над X, $\mathscr{M}^*$ — дифференциальный пучок над Y. Мы предположим для определенности, что основное кольцо есть $\mathbf{Z}$, но все дальнейшее можно распространить на случай, когда $\mathscr{L}^*$ состоит из правых модулей над произвольным основным кольцом A, а $\mathscr{M}^*$ — из левых A-модулей.

По $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ можно построить над пространством $X \times Y$ пучок двойных комплексов

$$\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*,$$

который мы будем называть *полным тензорным произведением* данных дифференциальных пучков. Для его определения положим

$$(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)^{pq} = \mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q$$

и рассмотрим дифференциалы

$$d' : \mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q \to \mathscr{L}^{p+1} \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q,$$

$$d'' : \mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q \to \mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^{q+1},$$

которые очевидным способом индуцируются дифференциалами из $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$. В наиболее важном для дальнейшего случае, когда градуировки в $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ положительны, мы будем также рассматривать $\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*$, как дифференциальный пучок над $X \times Y$, полагая

$$(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q$$

и определяя дифференциал d соотношением

$$d = d' + d''.$$

Комплекс сечений пучка $\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*$ будет совпадать тогда с двойным комплексом

$$\Gamma(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*) = \sum \Gamma(\mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q),$$

снабженным полной градуировкой и полным дифференциалом, так как по соображениям конечности будем иметь

$$\Gamma((\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)^n) = \sum_{p+q=n} \Gamma(\mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q).$$

В общем случае, когда градуировки не ограничены снизу, мы условимся определять комплекс $\Gamma(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)$ или, более общим образом, $\Gamma_\Theta(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)$, где Θ — произвольное семейство носителей в $X \times Y$, с помощью предыдущей формулы (в которую подставлен, разумеется, индекс Θ).

Пусть Φ и Ψ — семейства носителей в X и Y, и пусть $\Theta = \Phi \times \Psi$ — произведение этих семейств (напомним, что Θ состоит из замкнутых множеств в $X \times Y$, содержащихся в множествах вида $S \times T$, где $S \in \Phi$, $T \in \Psi$). Для любых пучков $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ над X и Y в п. 2.10 был определен канонический гомоморфизм

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{A}) \otimes \Gamma_\Psi(\mathscr{B}) \to \Gamma_\Theta(\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}).$$

Для любых дифференциальных пучков $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ над X и Y отсюда получается, очевидно, *гомоморфизм двойных комплексов*

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \otimes \Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*) \to \Gamma_\Theta(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)$$

и, следовательно, канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H^p(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) \otimes H^q(\Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*)) \to H^{p+q}(\Gamma_\Theta(\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)).} \tag{1}$$

Мы выведем отсюда существование канонических гомоморфизмов

$$\boxed{H^p_\Phi(X;\ \mathscr{A}) \otimes H^q_\Psi(Y;\ \mathscr{B}) \to H^{p+q}_\Theta(X \times Y;\ \mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B})} \tag{2}$$

для любых пучков $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ над X и Y.

Напомним прежде всего общую формулу

$$\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}(x,\ y) = \mathscr{A}(x) \otimes \mathscr{B}(y).$$

Если теперь обозначить через

$$\mathscr{A}^* = \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{A}), \quad \mathscr{B}^* = \mathscr{C}^*(Y;\ \mathscr{B})$$

канонические резольвенты пучков $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, то будем иметь для любых $x \in X$, $y \in Y$ изоморфизм комплексов

$$\mathscr{A}^* \widehat{\otimes} \mathscr{B}^*(x,\ y) = \mathscr{A}^*(x) \otimes \mathscr{B}^*(y).$$

Этот изоморфизм, очевидно, совместим с каноническими гомоморфизмами

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^*, \quad \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*, \quad \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*.$$

Так как комплексы вида $\mathcal{A}^*(x)$ гомотопно тривиальны (замечание 4.3.1), то $\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*$ *является резольвентой пучка* $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ и, следовательно, мы имеем канонические гомоморфизмы

$$H^{p+q}(\Gamma_\Theta(\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*)) \to H_\Theta^{p+q}(X \times Y;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}). \tag{3}$$

Их композиции с очевидными гомоморфизмами

$$H^p(\Gamma_\Phi(\mathcal{A}^*)) \otimes H^q(\Gamma_\Psi(\mathcal{B}^*)) \to H^{p+q}(\Gamma_\Theta(\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*)) \tag{4}$$

и дают нам, по определению, гомоморфизмы (2).

Если заданы два класса когомологий

$$\xi \in H_\Phi^p(X;\ \mathcal{A}), \quad \eta \in H_\Psi^q(Y;\ \mathcal{B}),$$

то класс

$$\xi \times \eta \in H_\Theta^{p+q}(X \times Y;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}),$$

полученный из $\xi \otimes \eta$ с помощью (2), называется *декартовым произведением* классов ξ и η. Мы увидим в дальнейшем, что эта операция обладает свойствами, аналогичными свойствам декартова произведения, которое изучалось в гл. I, § 3, и в действительности тесно связана с ним.

Заметим, что, согласно теореме 4.7.2 и примеру 4.8.1, для построения гомоморфизмов (3) достаточно иметь гомоморфизмы дифференциальных пучков

$$\boxed{\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}^*(Y;\ \mathcal{B}) \to \mathcal{C}^*(X \times Y;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}).} \tag{5}$$

Мы опишем сейчас эти гомоморфизмы.

Пусть f — сечение пучка $\mathcal{C}^p(X;\ \mathcal{A})$ над открытым множеством U из X, g — сечение пучка $\mathcal{C}^q(Y;\ \mathcal{B})$ над открытым множеством $V \subset Y$. По замечанию 4.3.2 f можно представить функцией

$$f(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p),$$

определенной на множестве вида

$$x_0 \in U, \quad x_1 \in U(x_0), \ \ldots, \ x_p \in U(x_0, \ldots, x_{p-1})$$

и равной 0 при $x_1 = x_0$. Точно так же g представимо функцией

$$g(y_0, \ldots, y_q) \in \mathcal{B}(y_q),$$

заданной на множестве вида

$$y_0 \in V, \quad y_1 \in V(y_0), \ \ldots, \ y_q \in V(y_0, \ \ldots, \ y_{q-1})$$

и равной нулю при $y_1 = y_0$. Рассмотрим точки „общего вида“

$$z_0 = (x_0, \ y_0), \ \ldots, \quad z_{p+q} = (x_{p+q}, \ y_{p+q})$$

в пространстве $Z = X \times Y$ и определим функцию

$$h(z_0, \ \ldots, \ z_{p+q}) \in \mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}(z_{p+q}) = \mathscr{A}(x_{p+q}) \otimes \mathscr{B}(y_{p+q})$$

формулой

$$h(z_0, \ \ldots, \ z_{p+q}) = f(x_0, \ \ldots, \ x_p)(x_{p+q}) \otimes g(y_p, \ \ldots, \ y_{p+q}), \qquad (6)$$

где выражение $f(x_0, \ \ldots, \ x_p)(x_{p+q})$, как и в замечании 4.3.2, есть значение в точке x_{p+q} непрерывного сечения пучка $\mathscr{A}$, которое в x_p равно $f(x_0, \ \ldots, \ x_p)$. Это выражение, следовательно, определено на множестве вида

$$x_0 \in U, \ x_1 \in U(x_0), \ \ldots, \ x_p \in U(x_0, \ \ldots, \ x_{p-1}), \ x_{p+q} \in U(x_0, \ \ldots, \ x_p).$$

Таким образом, функция (6) определена на множестве вида

$$z_0 \in W = U \times V, \ z_1 \in W(z_0), \ \ldots, \ z_{p+q} \in W(z_0, \ \ldots, \ z_{p+q-1}).$$

Ясно, кроме того, что h равняется нулю при $z_1 = z_0$. Следовательно, h определяет некоторое сечение пучка $\mathscr{C}^{p+q}(X \times Y, \ \mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B})$ над $U \times V$. Тривиально проверяется, что *сечение*, определяемое функцией h, зависит только от *сечений*, определяемых функциями f и g, и не зависит от выбора функций f, g, h. Таким образом, получаются *билинейные* отображения

$$\mathscr{A}^p(U) \times \mathscr{B}^q(V) \to (\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B})^{p+q}(U \times V),$$

которые, очевидно, совместимы с операторами ограничения. Отсюда немедленно вытекают гомоморфизмы пучков

$$\mathscr{A}^p \widehat{\otimes} \mathscr{B}^q \to (\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B})^{p+q}$$

и, следовательно, гомоморфизм (5). То, что этот гомоморфизм совместим с дифференциалами, следует из явных формул замечания 4.3.2 и из тривиальных вычислений.

Таким образом, чтобы вычислить декартово произведение двух классов когомологий ξ и η, можно поступить следующим образом. Представим ξ и η коциклами $f \in C^p_\Phi(X; \ \mathscr{A})$ и $g \in C^q_\Psi(Y; \ \mathscr{B})$ и образуем коцепь $f \times g \in C^{p+q}_\Theta(X \times Y; \ \mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B})$ по формуле (6). Эта коцепь и является коциклом, определяющим искомое декартово произведение.

Эти рассмотрения показывают, что для определения декартова произведения в теории пучков достаточно знать *определение* групп когомологий, а использование основных теорем § 4 в принципе излишне.

6.2. Вычисление декартова произведения с помощью резольвент.

Основной здесь является следующая теорема.

Теорема 6.2.1. *Пусть X, Y и $Z = X \times Y$ — три пространства, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — пучки с базами X, Y и Z, и пусть Φ, Ψ и $\Theta = \Phi \times \Psi$ — семейства носителей в X, Y и Z. Предположим, что заданы резольвенты $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{N}^*$ пучков $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а также гомоморфизм дифференциальных пучков*

$$v : \mathcal{L}^* \widehat{\otimes} \mathcal{M}^* \to \mathcal{N}^*,$$

совместимый с гомоморфизмом

$$u : \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to \mathcal{C}.$$

Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \otimes H^*(\Gamma_\Psi(\mathcal{M}^*)) & \to & H^*(\Gamma_\Theta(\mathcal{N}^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*_\Phi(X;\ \mathcal{A}) \otimes H^*_\Psi(Y;\ \mathcal{B}) & \longrightarrow & H^*_\Theta(Z;\ \mathcal{C}). \end{array}$$

[Вертикальные стрелки этой диаграммы являются следствием канонических гомоморфизмов

$$H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^*_\Phi(X;\ \mathcal{A})$$

и т. д., верхняя горизонтальная стрелка индуцирована гомоморфизмом v, нижняя — получена композицией декартова произведения с гомоморфизмом

$$H^*_\Theta(Z;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \to H^*_\Theta(Z;\ \mathcal{C}),$$

индуцированным гомоморфизмом u.]

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся, как и в предыдущем пункте, сокращенными обозначениями. Через $\mathcal{A}^*$ обозначим дифференциальный пучок $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{A})$, через $\mathcal{L}^{**}$ — пучок двойных комплексов $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L}^*)$ и т. д. Напомним, что канонический гомоморфизм

$$H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{L}^*)) \to H^*_\Phi(X;\ \mathcal{A})$$

можно получить, применяя к диаграмме

$$\mathscr{A}^* \xrightarrow{j''_{\mathscr{A}}} \mathscr{L}^{**} \xleftarrow{j'_{\mathscr{A}}} \mathscr{L}^*$$

функтор $H^*(\Gamma_\Phi(\ldots))$ (тогда $j''_{\mathscr{A}}$ переходит в изоморфизм, что и дает возможность определить искомый гомоморфизм).

Образуем теперь следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^* \arrow[rr, "v"] \arrow[d, "j'_{\mathscr{A}} \hat{\otimes} j'_{\mathscr{B}}"'] \arrow[dr] & & \mathscr{N}^* \arrow[d, "j'_{\mathscr{C}}"] \\
\mathscr{L}^{**} \widehat{\otimes} \mathscr{M}^{**} \arrow[r, "p"] & (\mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*)^* \arrow[r, "v^*"] & \mathscr{N}^{**} \\
\mathscr{A}^* \widehat{\otimes} \mathscr{B}^* \arrow[r, "p"] \arrow[u, "j''_{\mathscr{A}} \hat{\otimes} j''_{\mathscr{B}}"] & (\mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B})^* \arrow[r, "u^*"] \arrow[u] & \mathscr{C}^*. \arrow[u, "j''_{\mathscr{C}}"']
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизмы этой диаграммы, за исключением v^* и u^*, были уже определены, v^* есть гомоморфизм

$$\mathscr{C}^*(Z;\ \mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^*) \to \mathscr{C}^*(Z;\ \mathscr{N}^*),$$

индуцированный гомоморфизмом v; аналогично определяется u^*. Через p обозначены гомоморфизмы, приводящие к декартову произведению, которые были определены в предыдущем пункте.

Указанная диаграмма *коммутативна*. Это следует из того, что гомоморфизм

$$p : \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{A}) \widehat{\otimes} \mathscr{C}^*(Y;\ \mathscr{B}) \to \mathscr{C}^*(X \times Y;\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$$

естественен (т. е. совместим с гомоморфизмами пучков) и, кроме того, совместим с каноническими „дополнениями“ соответствующих дифференциальных пучков. Кстати, все гомоморфизмы, встречающиеся в диаграмме, совместимы с полными градуировками и полными дифференциалами рассматриваемых кратных комплексов.

Теорема 6.2.1 получится теперь, если к указанной диаграмме применить функтор $H^*(\Gamma_\Theta(\ldots))$.

Пример 6.2.1. Пусть X и Y — два *дифференцируемых многообразия*, ω и $\bar{\omega}$ — дифференциальные формы на X и Y степеней p и q. Из них можно получить дифференциальную форму $\theta = \omega \times \bar{\omega}$ степени $p+q$ на $X \times Y$ следующим образом. Если (x_i) — система координат в открытом множестве U из X, а (y_i) — система координат в открытом множестве V из Y и если

$$\omega = \sum f_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \text{ в } U,$$

$$\bar{\omega} = \sum g_{j_1 \ldots j_q}(y)\, dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_q} \text{ в } V,$$

то положим

$$\omega \times \bar{\omega} = \sum f_{i_1 \dots i_p}(x)\, g_{j_1 \dots j_q}(y)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}$$

в $U \times V$ (разумеется, форму $\omega \times \bar{\omega}$ можно определить и не пользуясь системами координат). Обозначим через Ω^*_X дифференциальный пучок ростков дифференциальных форм на X. Тогда предыдущее определение показывает, что мы имеем гомоморфизм

$$\Omega^*_X \widehat{\otimes} \Omega^*_Y \to \Omega^*_{X \times Y}.$$

Таким образом, получаем следующий результат. *Если вещественные классы когомологий* $\xi \in H^p(X;\, \mathrm{R})$ *и* $\eta \in H^q(Y;\, \mathrm{R})$ *представлены дифференциальными формами* ω *и* $\bar{\omega}$, *то класс когомологий*

$$\xi \times \eta \in H^{p+q}(X \times Y;\, \mathrm{R})$$

представлен дифференциальной формой $\omega \times \bar{\omega}$.

6.3. Декартово произведение в когомологиях Чеха.

Рассмотрим пространство X, пучок $\mathcal{A}$ над X и покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, которое мы предположим либо открытым, либо замкнутым и локально конечным. Тогда (теорема 5.2.1) дифференциальный пучок $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U};\, \mathcal{A})$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$.

Возьмем теперь пространство Y, пучок $\mathcal{B}$ над Y и покрытие $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ пространства Y, которое мы предположим той же природы, что $\mathfrak{U}$. Покрытие

$$\mathfrak{U} \times \mathfrak{V} = (U_i \times V_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$$

пространства $X \times Y$ будет тогда открытым (если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ открыты) или же замкнутым и локально конечным (если такими были $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$). Мы определим сейчас канонический гомоморфизм

$$\boxed{\mathcal{C}^*(\mathfrak{U};\, \mathcal{A}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}^*(\mathfrak{V};\, \mathcal{B}) \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V};\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}).} \tag{7}$$

Для этого выберем и зафиксируем в теории симплициальных коцепных комплексов какое-нибудь естественное преобразование

$$T\colon X^* \otimes Y^* \to X^* \times Y^*$$

(см. гл. I, п. 3.10), индуцирующее тождественное преобразование в степени 0 и допускающее обратное с точностью до гомотопии,

Для заданных открытых множеств U в X и V в Y мы получим отсюда гомоморфизм комплексов

$$T: C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}) \to C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \times C^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}), \quad (8)$$

который, очевидно, совместим с операторами ограничения, определенными в п. 5.2.

С другой стороны, имеем естественный гомоморфизм [1])

$$C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \times C^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}) \to C^*[(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}) \cap (U \times V); \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}], \quad (9)$$

который определяется следующим образом (дадим определение для случая $U = X$, $V = Y$, общий случай выводится отсюда тривиально). Если $\alpha = (\alpha_s)$ и $\beta = (\beta_t)$ — коцепи одинаковой степени n покрытий $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ со значениями в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то гомоморфизм (9) переводит коцепь $\alpha \times \beta$ степени n левого комплекса в коцепь степени n правого комплекса, определяемую отображением

$$(s, t) \to \alpha(s) \otimes \beta(t) \in \mathcal{A}(U_s) \otimes \mathcal{B}(V_t).$$

При этом, разумеется, $\alpha(s) \otimes \beta(t)$ отождествляется с соответствующим сечением пучка $\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}$ над $U_s \times V_t$.

Композиция гомоморфизмов (8) и (9) дает нам гомоморфизмы

$$C^*(\mathfrak{U} \cap U; \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V} \cap V; \mathcal{B}) \to C^*[(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}) \cap (U \times V); \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}],$$

откуда получается гомоморфизм соответствующих дифференциальных пучков. Это, по определению, и есть гомоморфизм (7), который мы хотели построить.

Разумеется, гомоморфизм

$$C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V}; \mathcal{B}) \to C^*(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}), \quad (10)$$

который следует из (7), есть в силу самой конструкции последнего гомоморфизма композиция гомоморфизмов (8) и (9). Для того чтобы явно задать этот гомоморфизм, достаточно явно задать преобразование T. Это можно сделать, например, транспонировав формулу за-

[1]) Иногда случается, что гомоморфизм

$$C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \times C^*(\mathfrak{V}; \mathcal{B}) \to C^*(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})$$

является изоморфизмом [в этом случае когомологии покрытия $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ вычисляются с помощью комплекса $C^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \otimes C^*(\mathfrak{V}; \mathcal{B})$, т. е. по формулам Кюннета]. Так будет, очевидно, в том случае, когда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ *конечны* и когда для всякого симплекса S покрытия $\mathfrak{U}$ и всякого симплекса T покрытия $\mathfrak{V}$ канонический гомоморфизм $\mathcal{A}(U_S) \otimes \mathcal{B}(V_T) \to \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}(U_S \times V_T)$ является *изоморфизмом*. Эта ситуация встречается в алгебраической геометрии (когда X и Y — алгебраические многообразия, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — пучки ростков регулярных функций на X и Y, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — покрытия многообразий X и Y с помощью аффинных открытых множеств).

мечания 3.9.1 гл. I. Очевидно, при этом получается следующий результат: *если* $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$, $\beta \in C^q(\mathfrak{V}; \mathcal{B})$, *то образ элемента* $\alpha \otimes \beta$ *при гомоморфизме* (10) *есть коцепь*

$$\gamma \in C^{p+q}(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}),$$

определенная формулой

$$\gamma_{(i_0 j_0) \ldots (i_{p+q} j_{p+q})} = \alpha_{i_0 \ldots i_p} \otimes \beta_{j_p \ldots j_{p+q}}, \tag{11}$$

где в правой части, являющейся сечением пучка $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ над $U_{i_0 \ldots i_p} \times V_{j_p \ldots j_{p+q}}$, подразумевается ограничение этого сечения на $U_{i_0 \ldots i_{p+q}} \times V_{j_0 \ldots j_{p+q}}$.

Воспользуемся теперь теоремой 6.2.1. Мы получим следующий результат.

Теорема 6.3.1. *Пусть X и Y — два топологических пространства, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — пучки над X и Y,* $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ *— покрытия пространств X и Y. Предположим, что оба покрытия либо открыты, либо замкнуты и локально конечны. Пусть $\xi \in H^p(X; \mathcal{A})$, $\eta \in H^q(Y; \mathcal{B})$ — классы когомологий, представленные в покрытиях $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ коциклами $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$* и *$\beta \in C^q(\mathfrak{V}; \mathcal{B})$. Тогда класс когомологий*

$$\xi \times \eta \in H^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$$

представлен коциклом $\gamma \in C^{p+q}(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$, определенным формулой (11).

Заметим, что если покрытия $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ имеют вид $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$, $\mathfrak{V} = (V_y)_{y \in Y}$, где $x \in U_x$ и $y \in V_y$, то покрытие $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ имеет вид $(W_z)_{z \in X \times Y}$, где $z \in W_z$. Так как гомоморфизмы (10) коммутируют с операцией перехода к более мелкому покрытию, то из (10), переходя к пределу, получим канонический гомоморфизм

$$\check{C}^*(X; \mathcal{A}) \otimes \check{C}^*(Y; \mathcal{B}) \to \check{C}^*(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \tag{12}$$

и, следовательно, гомоморфизмы

$$\boxed{\check{H}^p(X; \mathcal{A}) \otimes \check{H}^q(Y; \mathcal{B}) \to \check{H}^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})}$$

в когомологиях Чеха. Из теоремы 6.3.1, очевидно, следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(X; \mathcal{A}) \otimes \check{H}^q(Y; \mathcal{B}) & \to & \check{H}^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X; \mathcal{A}) \otimes H^q(Y; \mathcal{B}) & \to & H^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}), \end{array}$$

что позволяет вычислять декартово произведение, используя когомологии Чеха, во всех тех случаях, когда они изоморфны когомологиям H^* — например, если X, Y и $X \times Y$ паракомпактны. (Заметим, кстати, что произведение паракомпактных пространств *не обязано быть* паракомпактным пространством). Мы видим, что в этом случае декартово произведение сводится в существенном к декартову произведению, определенному в гл. I, § 3. Мы увидим дальше, что то же самое имеет место *и в общем случае.*

6.4. Симплициальные резольвенты.

Пусть X — топологическое пространство. Будем называть *пучком симплициальных коцепных комплексов* над X всякий градуированный пучок $\mathscr{L}^* = (\mathscr{L}^n)_{n \geqslant 0}$, снабженный структурой, которая определяется заданием для всякого отображения $f: \Delta_p \to \Delta_q$ гомоморфизма пучков

$$\bar{f}: \mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^q,$$

„мультипликативно" зависящего от f, как это было объяснено в гл. I, § 3. В этом случае для всякого U группа $\mathscr{L}^*(U)$ будет симплициальным коцепным комплексом и $\mathscr{L}^*$ можно снабдить структурой дифференциального пучка. Для всякого семейства Φ носителей в X группа $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)$ будет также симплициальным коцепным комплексом.

Например, для всякого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства X и всякого пучка $\mathcal{A}$ над X пучок $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ будет пучком симплициальных коцепных комплексов.

Точно так же можно было бы определить понятие *пучка полусимплициальных коцепных комплексов.* Для этого нужно в предыдущем определении ограничиться только неубывающими отображениями f.

Пусть X и Y — два пространства, $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ — два пучка симплициальных коцепных комплексов над X и Y. Определим с их помощью над пространством $X \times Y$ новый пучок симплициальных коцепных комплексов $\mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*$. Для этого положим

$$(\mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*)^n = \mathscr{L}^n \widehat{\otimes} \mathscr{M}^n$$

и определим для всякого отображения $f: \Delta_p \to \Delta_q$ гомоморфизм

$$\bar{f}: \mathscr{L}^p \widehat{\otimes} \mathscr{M}^p \to \mathscr{L}^q \widehat{\otimes} \mathscr{M}^q$$

как тензорное произведение гомоморфизмов $\bar{f}$ для $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$. Для любых открытых U и V из X и Y имеем, очевидно, канонический

гомоморфизм симплициальных комплексов

$$\mathscr{L}^*(U) \times \mathscr{M}^*(V) \to \mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*(U \times V). \tag{13}$$

Точно так же для любых семейств носителей Φ в X, Ψ в Y и $\Theta = \Phi \times \Psi$ в $X \times Y$ имеем канонический гомоморфизм

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \times \Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*) \to \Gamma_\Theta(\mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*). \tag{14}$$

В частности, для любых $x \in X$, $y \in Y$ имеем гомоморфизм

$$\mathscr{L}^*(x) \times \mathscr{M}^*(y) \to \mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*(x, y),$$

который является *изоморфизмом* в силу общей формулы

$$\mathscr{A}(x) \otimes \mathscr{B}(y) = \mathscr{A} \widehat{\otimes} \mathscr{B}(x, y).$$

Согласно теореме 3.10.1 гл. I, комплексы

$$\mathscr{L}^*(x) \otimes \mathscr{M}^*(y) \quad \text{и} \quad \mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*(x, y)$$

гомотопно эквивалентны и, в частности, имеют канонически изоморфные группы когомологий.

Вернемся теперь к гомоморфизмам (13). Выберем и зафиксируем некоторое естественное преобразование

$$T : X^* \otimes Y^* \to X^* \times Y^*, \tag{15}$$

индуцирующее тождественное отображение в степени 0 (см. гл. I, п. 3.10). Рассмотрим композицию гомоморфизма (13) с гомоморфизмом

$$\mathscr{L}^*(U) \otimes \mathscr{M}^*(V) \to \mathscr{L}^*(U) \times \mathscr{M}^*(V),$$

вытекающим из (15). Мы получим гомоморфизмы

$$\mathscr{L}^*(U) \otimes \mathscr{M}^*(V) \to \mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*(U \times V),$$

которые, очевидно, совместимы с операторами ограничения и поэтому дают гомоморфизм дифференциальных пучков

$$T : \mathscr{L}^* \widehat{\otimes} \mathscr{M}^* \to \mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*, \tag{16}$$

сводящийся к тождественному преобразованию в степени 0. Ясно, что гомоморфизм

$$\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \otimes \Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*) \to \Gamma_\Theta(\mathscr{L}^* \widehat{\times} \mathscr{M}^*), \tag{17}$$

следующий из (16), получается в результате композиции гомоморфизма (14) (определявшегося без использования T) и гомоморфизма

$$T: \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \otimes \Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*) \to \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*) \times \Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*),$$

следующего из теории гл. I, § 3.

Все сказанное выше, разумеется, применимо без всяких изменений к пучкам полусимплициальных коцепных комплексов.

Покажем теперь, как эти рассуждения позволяют *в общем случае* связать понятие декартова произведения, введенное в п. 6.1, с декартовым произведением, построенным в гл. I, § 3. Для этой цели мы построим каноническим образом *для всякого пространства X и всякого пучка $\mathscr{A}$ над X вялую резольвенту $\mathscr{F}^*(X; \mathscr{A})$ пучка $\mathscr{A}$, обладающую полусимплициальной структурой.* Будем называть ее *канонической симплициальной резольвентой пучка $\mathscr{A}$.* После этого мы построим гомоморфизмы

$$\mathscr{F}^*(X; \mathscr{A}) \mathbin{\widehat{\times}} \mathscr{F}^*(Y; \mathscr{B}) \to \mathscr{F}^*(X \times Y; \mathscr{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{B}),$$

которые в композиции с гомоморфизмами

$$T: \mathscr{F}^*(X; \mathscr{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{F}^*(Y; \mathscr{B}) \to \mathscr{F}^*(X; \mathscr{A}) \mathbin{\widehat{\times}} \mathscr{F}^*(Y; \mathscr{B})$$

дадут, как будет видно из теоремы 6.2.1, декартово произведение.

(a) *Построение пучка $\mathscr{F}^*(X; \mathscr{A})$.*

Положим

$$\mathscr{F}^0(X; \mathscr{A}) = \mathscr{C}^0(X; \mathscr{A})$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathscr{F}^n(X; \mathscr{A}) = \mathscr{C}^0(X; \mathscr{F}^{n-1}(X; \mathscr{A})),$$

так что $\mathscr{F}^n$ представляет собой $(n+1)$-кратную итерацию функтора $\mathscr{C}^0$. Ясно, что получаемые таким образом пучки являются *вялыми* и что имеем каноническое вложение

$$\mathscr{A} \to \mathscr{F}^0(X; \mathscr{A}).$$

Заметим, кроме того, что функтор $\mathscr{A} \to \mathscr{F}^*(X; \mathscr{A})$ *точен*, так как функтор $\mathscr{C}^0$ точен.

(b) *Сечения пучка $\mathscr{F}^*(X; \mathscr{A})$.*

Пусть α — сечение пучка $\mathscr{F}^n(X; \mathscr{A})$ над открытым множеством U. Положим для краткости $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}^n(X; \mathscr{A})$. Тогда α взаимно однозначным образом представляется отображением

$$x_0 \to \alpha(x_0) \in \mathscr{F}^{n-1}(x_0),$$

определенным в U. Так как $\alpha(x_0)$ есть росток не обязательно непрерывного сечения пучка $\mathscr{F}^{n-2}$ в точке x_0, то найдется открытое

множество $U(x_0)$ и функция

$$x_1 \to \alpha(x_0, x_1) \in \mathcal{F}^{n-2}(x_1),$$

определенная в $U(x_0)$ и представляющая $\alpha(x_0)$. Росток $\alpha(x_0, x_1)$ в свою очередь представляется функцией

$$x_2 \to \alpha(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{F}^{n-3}(x_2),$$

которая определена в открытом множестве $U(x_0, x_1)$, содержащем x_1. Итерируя эту конструкцию, мы найдем, что α можно представить функцией

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}(x_n),$$

определенной на подмножестве пространства X^{n+1} вида

$$x_0 \in U, \ x_1 \in U(x_0), \ \ldots, \ x_n \in U(x_0, \ldots, x_{n-1}),$$

где через $U(x_0, \ldots, x_i)$ обозначается открытое множество, зависящее только от $x_0, \ldots, x_i$ и содержащее x_i.

Ясно, что, наоборот, всякая функция такого типа однозначно определяет некоторое сечение пучка $\mathcal{F}^n$ над U.

Рассмотрим две функции

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad \beta(x_0, \ldots, x_n),$$

определенные соответственно для

$$x_0 \in U, \quad x_1 \in U(x_0), \ \ldots$$
$$x_0 \in V, \quad x_1 \in V(x_0), \ \ldots$$

и, следовательно, определяющие некоторые сечения α и β пучка $\mathcal{F}^n$ над U и V. Для того чтобы эти сечения совпадали в $W = U \cap V$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) = \beta(x_0, \ldots, x_n)$$

на некотором множестве вида

$$x_0 \in W, \ x_1 \in W(x_0), \ \ldots, \ x_n \in W(x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Это утверждение очевидно для $n = 0$ и доказывается индукцией по n.

Отсюда вытекает, что для задания сечений пучка $\mathcal{F}^n$ над U можно было бы ограничиться рассмотрением функций

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}(x_n),$$

определенных во всем U^{n+1}. Эти функции, очевидно, образуют абелеву группу. Группа сечений пучка $\mathcal{F}^n$ над U совпадает с фактор-

группой рассматриваемой группы функций по подгруппе „локально нулевых“ функций, т. е. функций α, удовлетворяющих равенству

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

на некотором множестве вида

$$x_0 \in U, \ x_1 \in U(x_0), \ \ldots, \ x_n \in U(x_0, \ \ldots, \ x_{n-1}).$$

Отметим важное отличие от коцепей Александера — Спаньера, определенных для простых пучков в примере 2.4.2. Оно состоит в том, что множество указанного вида, вообще говоря, не является окрестностью диагонали в U^{n+1}.

Указанная конструкция позволяет явно задать каноническое вложение $\mathscr{F}^n \to \mathscr{F}^{n+1}$. Действительно, рассмотрим сечение α пучка $\mathscr{F}^n$, представленное функцией $\alpha(x_0, \ldots, x_n)$. Пусть $\alpha(x_0, \ldots, x_{n+1})$ — функция, представляющая α как сечение пучка $\mathscr{F}^{n+1}$. В этом случае для всякого x функция

$$(x_0, \ldots, x_n) \to \alpha(x, x_0, \ldots, x_n)$$

определяет росток сечения $\tilde{\alpha}(x) \in \mathscr{F}^n(x)$. Но такой же росток определяется и функцией $\alpha(x_0, \ldots, x_n)$, поэтому

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

(c) *Полусимплициальная структура* [1]) *в* $\mathscr{F}^*(X; \mathscr{A})$.

Для того чтобы определить полусимплициальную структуру на градуированном пучке $\mathscr{F}^* = (\mathscr{F}^n)$, необходимо и достаточно определить на градуированных группах $\mathscr{F}^*(U)$ полусимплициальные структуры, совместимые с операторами ограничения.

Пусть α — сечение пучка $\mathscr{F}^p$ над открытым множеством U и f — возрастающее отображение множества Δ_p в Δ_q. Мы должны определить сечение $\beta = \overline{f}(\alpha) \in \mathscr{F}^q(U)$. Для этого представим α функцией $\alpha(x_0, \ldots, x_p) \in \mathscr{A}(x_p)$, определенной в U^{p+1}, и обозначим через β функцию, заданную формулой

$$\beta(x_0, \ldots, x_q) = \alpha(x_{f(0)}, \ldots, x_{f(p)})(x_q). \tag{18}$$

Здесь использованы обозначения замечания 4.3.2, а именно, если u — элемент из $\mathscr{A}(x)$, то через $u(y)$ обозначается любая функция

$$y \to u(y) \in \mathscr{A}(y),$$

которая *непрерывна в точке* x *и равна* u *при* $y = x$. Несмотря на неоднозначность, которая содержится в формуле (18), легко проверяется, что *сечение* β пучка $\mathscr{F}^q$ над U, определяемое функцией (18), зависит только от *сечения* α пучка $\mathscr{F}^p$.

[1]) Читатель, желающий избежать явных вычислений, которые приводятся ниже, может обратиться к приложению.

Мы предоставляем читателю проверку аксиом полусимплициальной структуры, а также объяснение того, почему невозможно определить на $\mathcal{F}^*$ „полную“ симплициальную структуру. Важно иметь в виду следующее соотношение: если $u \in \mathcal{A}(x)$, то

$$u(y)(z) = u(z)$$

на множестве вида $y \in U(x)$, $z \in U(y)$.

Дадим теперь явные формулы для дифференциала d в $\mathcal{F}^*$. Он преобразует сечение, представляемое функцией $\alpha(x_0, \ldots, x_n)$, в сечение, представляемое функцией, (или точнее, представляемое одной из функций, задаваемых следующей формулой):

$$(d\alpha)(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} \alpha(x_0, \ldots, x_n)(x_{n+1}). \quad (19)$$

Отсюда следует в силу формул замечания 4.3.2, что *каноническая резольвента* $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$ *канонически вложена в дифференциальный пучок* $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$.

(d) *Производные пучки для* $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$.

Мы покажем сейчас, что $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$.

Пусть $\alpha \in \mathcal{F}^n(x)$, где x фиксирована, и $d\alpha = 0$. Нужно доказать, что $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ при $n = 0$ и что $\alpha \in d(\mathcal{F}^{n-1}(x))$ при $n \geqslant 1$.

Предположим сначала, что $n = 0$. Пусть α представлен в окрестности U точки x функцией $\bar{\alpha}(x_0) \in \mathcal{A}(x_0)$. Тогда соотношение $d\alpha = 0$ означает, что функция $\bar{\alpha}(x_1) - \bar{\alpha}(x_0)(x_1)$ определяет 0 в $\mathcal{F}^1(x)$, т. е. что при достаточно малой U имеем

$$\bar{\alpha}(x_1) = \bar{\alpha}(x_0)(x_1)$$

на множестве вида $x_0 \in U$, $x_1 \in U(x_0)$. В частности, полагая $x_0 = x$, получаем

$$\bar{\alpha}(x_1) = \bar{\alpha}(x)(x_1) \quad \text{для} \quad x_1 \in U(x).$$

Но это означает, что функция $\bar{\alpha}(x_1)$ есть *непрерывное* сечение пучка $\mathcal{A}$, равное α в x, т. е. $\alpha \in \mathcal{A}(x)$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $n \geqslant 1$, и представим α в окрестности U точки x функцией $\alpha(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}(x_n)$. Так как $d\alpha = 0$, то можно считать (если U достаточно мала), что функция (19) локально равна 0 в U, т. е. равна нулю на множестве вида $x_0 \in U$, $x_1 \in U(x_0)$, ...

$\ldots, x_{n+1} \in U(x_0, \ldots, x_n)$. Выделим в (19) член с $i=0$ и положим $x_0 = x$. Тогда получим

$$\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha(x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) + \\ + (-1)^n \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)(x_{n+1}),$$

где

$$x_1 \in U(x),\ x_2 \in U(x, x_1), \ldots, x_{n+1} \in U(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим функцию

$$\beta(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \alpha(x, x_0, \ldots, x_{n-1})$$

и положим

$$V = U(x),\ V(x_0) = U(x, x_0), \ldots .$$

Тогда предыдущее соотношение показывает, что

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \beta(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) + \\ + (-1)^n \beta(x_0, \ldots, x_{n-1})(x_n),$$

когда $x_0 \in V$, $x_1 \in V(x_0)$, $\ldots$. Итак, если обозначить через β росток сечения пучка $\mathcal{F}^{n-1}(X; \mathcal{A})$ в точке x, определяемый функцией $\beta(x_0, \ldots, x_{n-1})$, то $\alpha = d\beta$. Этим доказано, что $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ является резольвентой пучка $\mathcal{A}$.

Будем называть $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ *канонической симплициальной резольвентой* пучка $\mathcal{A}$. Если Φ — некоторое семейство носителей в X, то положим

$$F^*_\Phi(X; \mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})).$$

Это *полусимплициальный коцепной комплекс*. Ясно, что справедливы следующие утверждения:

(I) *Каноническое вложение* $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ *индуцирует изоморфизмы*

$$H^p_\Phi(X; \mathcal{A}) = H^p(F^*_\Phi(X; \mathcal{A})).$$

(II) *Всякой точной последовательности*

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$$

соответствует точная последовательность

$$0 \to F^*_\Phi(X; \mathcal{A}') \to F^*_\Phi(X; \mathcal{A}) \to F^*_\Phi(X; \mathcal{A}'') \to 0,$$

которая приводит при посредстве изоморфизмов (I) *к точной последовательности когомологий, связанной с исходной точной последовательностью.*

Все это показывает, что в § 4 можно было бы *определить* группы $H_\Phi^*(X; \mathcal{A})$ с помощью симплициальной резольвенты $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ вместо резольвенты $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$.

(e) *Канонические гомоморфизмы*

$$\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \to \mathcal{F}^*(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}). \tag{20}$$

Для того чтобы их определить, достаточно построить гомоморфизмы

$$F^*(U; \mathcal{A}) \times F^*(V; \mathcal{B}) \to F^*(U \times V; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})$$

для произвольных открытых множеств U из X и V из Y. Рассмотрим для этого функции $\alpha \in F^n(U; \mathcal{A})$ и $\beta \in F^n(V; \mathcal{B})$ и определим искомый гомоморфизм, сопоставляя элементу $\alpha \otimes \beta$ из $F^n(U; \mathcal{A}) \otimes \otimes F^n(V; \mathcal{B})$ элемент из $F^n(U \times V; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})$, определяемый функцией

$$\alpha(x_0, \ldots, x_n) \otimes \beta(y_0, \ldots, y_n).$$

Мы предоставляем читателю проверить корректность этого определения.

(f) *Построение декартова произведения.*

Так как пучки $\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A})$ имеют полусимплициальные структуры, то соображения, развитые в начале этого пункта, приводят к каноническим гомоморфизмам

$$\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \to \mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\times}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \tag{21}$$

[эти гомоморфизмы в отличие от гомоморфизмов (20) следуют из теоремы 3.10.1 гл. I и с гомотопической точки зрения являются эквивалентностями]. Композиция этих гомоморфизмов с (20) дает естественные гомоморфизмы

$$\boxed{\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{F}^*(Y; \mathcal{B}) \to \mathcal{F}^*(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})}$$

и, следовательно, гомоморфизмы комплексов

$$F_\Phi^*(X; \mathcal{A}) \otimes F_\Psi^*(Y; \mathcal{B}) \to F_\Theta^*(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}).$$

Переходя к когомологиям, получаем гомоморфизмы

$$H_\Phi^p(X; \mathcal{A}) \otimes H_\Psi^q(Y; \mathcal{B}) \to H_\Theta^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}),$$

которые, в силу теоремы 6.2.1, совпадают с декартовыми произведениями.

Само собой разумеется, что эти результаты приводят к явному построению декартова произведения. Если класс когомологий ξ степени p над X представлен функцией $\alpha(x_0, \ldots, x_p) \in \mathcal{A}(x_p)$ и класс

когомологий η степени q над Y представлен функцией $\beta(y_0, \ldots, y_q) \in \mathcal{B}(y_q)$, то $\xi \times \eta$ представлен функцией

$$\gamma[(x_0, y_0), \ldots, (x_{p+q}, y_{p+q})] = \\ = \alpha(x_0, \ldots, x_p)(x_{p+q}) \otimes \beta(y_p, \ldots, y_{p+q}).$$

Если ограничиться элементами канонических резольвент, то мы вновь получим формулу (6) из п. 6.1.

В итоге мы видим, что, как уже говорилось выше, понятие декартова произведения в теории пучков непосредственно связано с понятием декартова произведения, рассматривавшимся в § 3 гл. I. Для паракомпактных пространств это было нами проверено еще раньше с помощью теории Чеха.

6.5. Формальные свойства декартова произведения.

В силу сказанного выше почти очевидно, что декартово произведение в теории пучков обладает свойствами декартова произведения, установленными в гл. I, теореме 3.11.1. Докажем это утверждение.

(a) *Отображение* $(\xi, \eta) \to \xi \times \eta$ *в степени* 0 *сводится к каноническому отображению*

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) \times \Gamma_\Psi(\mathcal{B}) \to \Gamma_\Theta(\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}).$$

Это свойство тривиально.

(b) *Декартово произведение совместимо с гомоморфизмами пучков.*

Это свойство опять очевидно.

(c) *Отображение* $(\xi, \eta) \to \xi \times \eta$ *билинейно.*

Это свойство также тривиально.

(d) *Декартово произведение ассоциативно.*

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, что для трех пространств X, Y, Z и пучков $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ над этими пространствами следующая диаграмма „гомотопно“ коммутативна (эта диаграмма даже коммутативна в строгом смысле слова, если задать естественные преобразования $X^* \otimes Y^* \to X^* \times Y^*$ явными формулами из гл. I, замечание 3.9.1):

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}^*) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C}^* & \mathcal{A}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} (\mathcal{B}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C}^*) \arrow[l] \arrow[d] \\
(\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B})^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C}^* & & \mathcal{A}^* \mathbin{\widehat{\otimes}} (\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C})^* \\
((\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C})^* \arrow[r] \arrow[u] & (\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C})^* & (\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} (\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{C}))^* . \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В этих формулах $\mathcal{A}^*$ обозначает каноническую или каноническую симплициальную резольвенту пучка $\mathcal{A}$.

Заметим, что наше доказательство основано исключительно на существовании гомоморфизмов $\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^* \to (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$, т. е. в конечном счете на явных формулах п. 6.1 или п. 6.4. Можно дать значительно более „функторное" доказательство этого факта, использующее теорию инъективных пучков, которая развита в следующем параграфе. Мы предоставляем читателю проделать это доказательство в качестве упражнения.

(e) *Декартово произведение антикоммутативно.*

Другими словами, для заданных классов когомологий ξ и η пространств X и Y образ элемента $\xi \times \eta$ при каноническом изоморфизме когомологий пространства $X \times Y$ на когомологии пространства $Y \times X$ равен $(-1)^{pq}\, \eta \times \xi$, где p и q — степени классов ξ и η. Самое простое доказательство получается в симплициальной теории. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — рассматриваемые пучки над X и Y, то, пренебрегая семействами носителей, будем иметь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
F^*(X;\ \mathcal{A}) \otimes F^*(Y;\ \mathcal{B}) & \to & F^*(X;\ \mathcal{A}) \times F^*(Y;\ \mathcal{B}) & \to & F^*(X \times Y;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
F^*(Y;\ \mathcal{B}) \otimes F^*(X;\ \mathcal{A}) & \to & F^*(Y;\ \mathcal{B}) \times F^*(X;\ \mathcal{A}) & \to & F^*(Y \times X;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}).
\end{array}$$

Мы уже видели [гл. I, часть (b) доказательства теоремы 3.11.1], что левый квадрат этой диаграммы коммутативен с точностью до гомотопии. Правый квадрат также коммутативен, что легко вытекает из явных формул. Это и дает требуемый результат.

(f) *Совместимость декартова произведения с точными последовательностями.*

Рассмотрим точную последовательность пучков с базой X

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{u} \mathcal{A} \xrightarrow{v} \mathcal{A}'' \to 0.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — такой пучок с базой Y, что последовательность

$$0 \to \mathcal{A}' \widehat{\otimes} \mathcal{B} \xrightarrow{u \widehat{\otimes} 1} \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \xrightarrow{v \widehat{\otimes} 1} \mathcal{A}'' \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to 0$$

точна. В этом случае имеются точные последовательности когомологий над X и над $X \times Y$. Докажем, что для любых классов когомологий $\xi'' \in H^*(X;\ \mathcal{A}'')$, $\eta \in H^*(Y;\ \mathcal{B})$ имеем

$$\boxed{\delta(\xi'' \times \eta) = (\delta\xi'') \times \eta.}$$

Для доказательства представим ξ'' коциклом $s'' \in F^*(X;\ \mathcal{A}'')$, а η — коциклом $t \in F^*(Y;\ \mathcal{B})$. Тогда найдется коцепь $s \in F^*(X;\ \mathcal{A})$, такая, что $s'' = v(s)$. В этом случае коцикл $ds \in F^*(X;\ \mathcal{A}')$ будет представлять класс $\delta\xi''$.

Обозначим отображение

$$F^*(X;\ \mathcal{A}) \otimes F^*(Y;\ \mathcal{B}) \to F^*(X \times Y;\ \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}),$$

приводящее к декартову произведению, через $s \otimes t \to s \times t$. Тогда легко заметить, что класс $\delta(\xi'' \times \eta)$ представлен коциклом $d(s \times t)$, а класс $(\delta\xi'') \times \eta$ — коциклом $(ds) \times t$. Поэтому достаточно доказать формулу

$$d(s \times t) = (ds) \times t.$$

Но она тривиальна, так как отображение $s \otimes t \to s \times t$ является гомоморфизмом комплексов и потому

$$d(s \times t) = (ds) \times t + (-1)^p s \times dt$$

для $s \in F^p(X;\ \mathcal{A})$, $t \in F^q(Y;\ \mathcal{B})$. Это и дает требуемый результат.

6.6. Определение и свойства $\smile$-произведения.

Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A}$ — пучок колец с базой X, $\mathcal{L}$ — правый $\mathcal{A}$-модуль, $\mathcal{M}$ — левый $\mathcal{A}$-модуль.

Определим отображения

$$H^p_\Phi(X;\ \mathcal{L}) \times H^q_\Psi(X;\ \mathcal{M}) \to H^{p+q}_\Theta(X;\ \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}),$$

где Φ и Ψ — семейства носителей в X, а Θ — пересечение семейств

$$\Theta = \Phi \cap \Psi.$$

Рассмотрим для этого канонические резольвенты $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L})$ и $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{M})$. Первая резольвента состоит из правых $\mathcal{A}$-модулей, вторая — из левых $\mathcal{A}$-модулей. Можно образовать дифференциальный пучок $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{M})$. В силу замечания 4.3.2 рассматриваемые резольвенты гомотопно тривиальны как $\mathcal{A}$-модули (т. е. дифференциальные $\mathcal{A}(x)$-модули $\mathcal{L}^*(x)$ и $\mathcal{M}^*(x)$ гомотопно тривиальны для всех $x \in X$). Поэтому тензорное произведение $\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{M})$ будет резольвентой пучка $\mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}$. Таким образом, имеются канонические гомоморфизмы

$$H^{p+q}[\Gamma_\Theta(\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{M}))] \to H^{p+q}_\Theta(X;\ \mathcal{L} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{M}).$$

Кроме того, имеется гомоморфизм комплексов

$$\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L})) \underset{\mathcal{A}(X)}{\otimes} \Gamma_\Psi(\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{M})) \to \Gamma_\Theta(\mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{L}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}^*(X;\ \mathcal{M}))$$

и, следовательно, гомоморфизмы

$$H^p_\Phi(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}(X)}{\otimes} H^q_\Psi(X;\ \mathscr{M}) \to H^{p+q}[\Gamma_\Theta(\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{M}))].$$

Композиция этих гомоморфизмов дает канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H^p_\Phi(X;\ \mathscr{L}) \underset{H^0(X;\ \mathscr{A})}{\otimes} H^q_\Psi(X;\ \mathscr{M}) \to H^{p+q}_\Theta(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}),} \tag{22}$$

которые и приводят к искомым отображениям.

Если заданы классы $\xi \in H^p_\Phi(X;\ \mathscr{L})$ и $\eta \in H^q_\Psi(X;\ \mathscr{M})$, то образ

$$\xi \underset{\mathscr{A}}{\cup} \eta \in H^{p+q}_\Theta(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M})$$

элемента $\xi \otimes \eta$ при отображении (22) называется $\cup$-*произведением* над $\mathscr{A}$ классов ξ и η.

Теория декартовых произведений, которую мы подробно изложили, переносится почти дословно на $\cup$-произведения. Поэтому мы ограничимся указанием окончательных результатов, предоставляя читателю проверку наших утверждений.

Прежде всего гомоморфизмы (22) можно определить прямо на основе гомоморфизма резольвент

$$\mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{M}) \to \mathscr{C}^*(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}),$$

который переводит элемент $\alpha \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \beta$, где $\alpha(x_0,\ \ldots,\ x_p) \in \mathscr{L}(x_p)$, $\beta(x_0,\ \ldots,\ x_q) \in \mathscr{M}(x_q)$ — произвольные „коцепи“, в коцепь

$$\alpha(x_0,\ \ldots,\ x_p)(x_{p+q}) \otimes \beta(x_p,\ \ldots,\ x_{p+q}).$$

С другой стороны, имеет место следующий аналог теоремы 6.2.1.

Теорема 6.6.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — правый $\mathscr{A}$-модуль, $\mathscr{M}$ — левый $\mathscr{A}$-модуль, а $\mathscr{P}$ — некоторый $\mathbf{Z}$-модуль. Пусть задана резольвента $\mathscr{L}^*$ модуля $\mathscr{L}$, состоящая из правых $\mathscr{A}$-модулей, резольвента $\mathscr{M}^*$ модуля $\mathscr{M}$, состоящая из левых $\mathscr{A}$-модулей, и резольвента $\mathscr{P}^*$ пучка $\mathscr{P}$. Пусть, наконец, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^* \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}^* \arrow[r, "v"] & \mathscr{P}^* \\
\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M} \arrow[r, "u"] \arrow[u] & \mathscr{P}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^*)) \otimes H^*(\Gamma_\Psi(\mathscr{M}^*)) & \to & H^*(\Gamma_\Theta(\mathscr{P}^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*_\Phi(X;\ \mathscr{L}) \otimes H^*_\Psi(X;\ \mathscr{M}) & \longrightarrow & H^*_\Theta(X;\ \mathscr{P}). \end{array}$$

[В этой диаграмме верхняя горизонтальная стрелка индуцирована гомоморфизмом v, нижняя горизонтальная стрелка получена композицией $\smile$-произведения над $\mathscr{A}$ с гомоморфизмом u^*, вертикальные стрелки следуют из того, что $\mathscr{L}^*$, ... являются резольвентами пучков $\mathscr{L}$, ... Наконец, тензорные произведения берутся относительно кольца $H^0(X;\ \mathscr{A})$.]

Из этой теоремы, в частности, вытекают такие следствия:

(a) Пусть дифференциальные формы ω и $\overline{\omega}$ на дифференцируемом многообразии X определяют классы когомологий ξ, $\eta \in H^*(X;\ \mathbf{R})$. Тогда форма $\omega \wedge \overline{\omega}$ определяет класс когомологий $\xi \underset{\mathbf{R}}{\smile} \eta$.

(b) $\smile$-произведение можно определять и с помощью симплициальных резольвент. Действительно, в обозначениях начала этого пункта имеем гомоморфизмы

$$\mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{M}) \to \mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\times} \mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{M})$$

и

$$\mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\times} \mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{M}) \to \mathscr{F}^*(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}).$$

Первый следует из гл. I, § 3, а второй получается итерацией очевидного гомоморфизма

$$\mathscr{C}^0(X;\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{C}^0(X;\ \mathscr{M}) \to \mathscr{C}^0(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}).$$

Разумеется, что если над X заданы пучки $\mathscr{L}^*$ и $\mathscr{M}^*$ полусимплициальных коцепных комплексов, то их *декартово произведение* определяется формулой $(\mathscr{L}^* \times \mathscr{M}^*)^n = \mathscr{L}^n \otimes \mathscr{M}^n$ при очевидном определении операторов граней.

(c) Можно определить $\smile$-произведение и в *теории Чеха.* Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)$ и $\mathfrak{V} = (V_j)$ — два покрытия пространства X, оба открытые или же оба замкнутые и локально конечные. Обозначим через $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ покрытие, образованное множествами $U_i \cap V_j$. Имеем прежде всего, согласно гл. I, § 3, гомоморфизмы

$$\mathscr{C}^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{C}^*(\mathfrak{V};\ \mathscr{M}) \to \mathscr{C}^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\times} \mathscr{C}^*(\mathfrak{V};\ \mathscr{M}).$$

С другой стороны, имеем гомоморфизмы

$$\mathscr{C}^*(\mathfrak{U};\ \mathscr{L}) \underset{\mathscr{A}}{\times} \mathscr{C}^*(\mathfrak{V};\ \mathscr{M}) \to \mathscr{C}^*(\mathfrak{W};\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}),$$

которые определяются следующим образом. Если $\alpha_{i_0 \ldots i_n}$ и $\beta_{j_0 \ldots j_n}$ — коцепи покрытий $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ со значениями в $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$, то искомый гомоморфизм преобразует $\alpha \underset{\mathscr{A}}{\times} \beta$ в коцепь γ покрытия $\mathfrak{W}$ со значениями в $\mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}$, определенную формулой

$$\gamma_{(i_0 j_0) \ldots (i_n j_n)}(x) = \alpha_{i_0 \ldots i_n}(x) \otimes \beta_{j_0 \ldots j_n}(x) \left(x \in U_{i_0 \ldots i_n} \cap V_{j_0 \ldots j_n}\right).$$

Разумеется, для того чтобы получить гомоморфизм *пучков*, нужно применять эту формулу *локально*. Отсюда получаются канонические гомоморфизмы

$$\boxed{H^p_\Phi(\mathfrak{U}; \mathscr{L}) \underset{H^0(X; \mathscr{A})}{\otimes} H^q_\Psi(\mathfrak{V}; \mathscr{M}) \to H^{p+q}_{\Phi \cap \Psi}(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}; \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}).}$$

Под действием канонических гомоморфизмов когомологий покрытия в когомологии пространства полученные гомоморфизмы переходят в $\smile$-произведения над $\mathscr{A}$.

В пределе получаются *$\smile$-произведения в когомологиях Чеха*

$$\boxed{\check{H}^p_\Phi(X; \mathscr{L}) \underset{H^0(X; \mathscr{A})}{\otimes} \check{H}^q_\Psi(X; \mathscr{M}) \to \check{H}^{p+q}_{\Phi \cap \Psi}(X; \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}),}$$

которые также совместимы с $\smile$-произведениями, определенными в начале этого пункта.

Свойства, сформулированные в п. 6.5 для декартова произведения, при очевидных изменениях остаются справедливыми для $\smile$-произведений (ассоциативность и антикоммутативность имеют место только для пучков *коммутативных* колец), т. е. $\smile$-произведение билинейно, ассоциативно, антикоммутативно и совместимо с точными последовательностями когомологий. В качестве приложения получаем, что *если $\mathscr{A}$ — пучок коммутативных колец над X, то группа $H^*_\Phi(X; \mathscr{A})$, снабженная $\smile$-произведением, является ассоциативной, антикоммутативной градуированной алгеброй над кольцом* $H^0(X; \mathscr{A}) = \Gamma(\mathscr{A})$. Это — *кольцо когомологий* (с носителями в Φ) пространства X со значениями в $\mathscr{A}$.

В случае когда пучок $\mathscr{A}$ простой, т. е. когда его можно отождествить с фиксированным кольцом A, $\smile$-произведение можно получить из декартова произведения с помощью *диагонального отображения* $x \to (x, x)$ пространства X в $X \times X$. Действительно, это отображение индуцирует гомоморфизмы

$$H^{p+q}_{\Phi \times \Psi}(X \times X; \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\widehat{\otimes}} \mathscr{M}) \to H^{p+q}_{\Phi \cap \Psi}(X; \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}),$$

композиция которых с декартовыми произведениями дает $\smile$-произведения. Это следует, очевидно, из того, что обратный образ пучка $\mathscr{L} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{M}$ при диагональном отображении есть $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$. Следовательно, в этом случае можно было бы вывести свойства $\smile$-произведения из свойств декартова произведения.

Впрочем, этим способом можно получить $\smile$-произведения и над произвольным пучком колец $\mathscr{A}$. Действительно, пусть $\mathscr{L}$ — правый $\mathscr{A}$-модуль, $\mathscr{M}$ — левый $\mathscr{A}$-модуль. Обозначая тензорное произведение над кольцом целых рациональных чисел просто знаком $\otimes$, имеем канонический гомоморфизм

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{M} \to \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}.$$

Композиция соответствующего гомоморфизма с $\smile$-произведением относительно кольца $\mathbf{Z}$ дает отображения

$$H^p_\Phi(X;\ \mathscr{L}) \times H^q_\Psi(X;\ \mathscr{M}) \to H^{p+q}_{\Phi\cap\Psi}(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}).$$

Легко видеть, что они билинейны относительно кольца $H^0(X;\ \mathscr{A})$. Следовательно, эти отображения определяют гомоморфизмы

$$H^p_\Phi(X;\ \mathscr{L}) \underset{H^0(X;\ \mathscr{A})}{\otimes} H^q_\Psi(X;\ \mathscr{M}) \to H^{p+q}_{\Phi\cap\Psi}(X;\ \mathscr{L} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{M}).$$

Это и есть $\smile$-произведение над $\mathscr{A}$.

§ 7. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ В ТЕОРИИ ПУЧКОВ

7.1. Инъективные пучки.

Пусть X — пространство, $\mathcal{A}$ — пучок колец с базой X и $\mathcal{J}$ — левый $\mathcal{A}$-модуль. Пучок $\mathcal{J}$ называется *инъективным*, если функтор

$$\mathcal{L} \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{J}),$$

определенный на категории левых $\mathcal{A}$-модулей, *точен.*

Теорема 7.1.1. *Всякий $\mathcal{A}$-модуль можно погрузить в инъективный $\mathcal{A}$-модуль.*

Действительно, пусть $\mathcal{L}$ — левый $\mathcal{A}$-модуль. Для любой точки $x \in X$ выберем погружение $\mathcal{A}(x)$-модуля $\mathcal{L}(x)$ в инъективный $\mathcal{A}(x)$-модуль $I(x)$. После этого построим левый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{J}$, полагая для всякого открытого множества U из X

$$\mathcal{J}(U) = \prod_{x \in U} I(x) \tag{1}$$

и определяя естественным образом операции ограничения. Ясно, что $\mathcal{L}$ можно погрузить в $\mathcal{J}$. Докажем, что $\mathcal{J}$ — инъективный $\mathcal{A}$-модуль. Очевидно, это будет доказано, если мы покажем, что для любого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{M}$ имеет место канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}(x)}(\mathcal{M}(x), I(x)). \tag{2}$$

Заметим прежде всего, что для всякого x имеется канонический гомоморфизм $\mathcal{A}(x)$-модулей

$$v(x) : \mathcal{J}(x) \to I(x);$$

достаточно сопоставить сечению пучка $\mathcal{J}$, определенному в окрестности точки x, его „значение“ в этой точке. Таким образом, всякий гомоморфизм f: $\mathcal{M} \to \mathcal{J}$ определяет семейство гомоморфизмов

$$\bar{f}(x) = v(x) \circ f(x) : \mathcal{M}(x) \to I(x).$$

Отсюда получается гомоморфное отображение левого члена формулы (2) в правый. Построенный гомоморфизм является мономорфизмом, так как f преобразует сечение $s \in \mathcal{M}(U)$ в сечение пучка $\mathcal{J}$,

определяемое элементом $(\bar{f}(x)(s(x)))_{x \in U}$ из $\mathcal{J}(U)$. Этот гомоморфизм является также эпиморфизмом, потому что любому семейству $\mathcal{A}(x)$-гомоморфизмов $g(x)\colon \mathcal{M}(x) \to I(x)$ и всякому сечению $s \in \mathcal{M}(U)$ можно сопоставить сечение $f(s) \in \mathcal{J}(U)$, представленное семейством $(g(x)(s(x)))_{x \in U}$. Мы нашли такой гомоморфизм $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{J}$, что $g(x) = \bar{f}(x)$ для всех x. Теорема доказана.

Аналогичная теорема относительно *проективных* $\mathcal{A}$-модулей неверна.

Теорема 7.1.1, очевидно, позволяет применять методы гл. I, по крайней мере те, которые основаны только на существовании инъективных объектов. Таким образом, например, получаются следующие результаты, которые излишне доказывать здесь, поскольку они справедливы для любой абелевой категории, обладающей „достаточным количеством“ инъективных объектов;

(a) *Всякий $\mathcal{A}$-модуль обладает инъективными резольвентами.*

(b) *Пусть заданы $\mathcal{A}$-модули $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, резольвента $\mathcal{L}^*$ пучка $\mathcal{L}$ и инъективная резольвента $\mathcal{M}^*$ пучка $\mathcal{M}$; тогда всякий гомоморфизм $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ можно „продолжить“ до гомоморфизма $\mathcal{L}^* \to \mathcal{M}^*$ и это „продолжение“ единственно с точностью до гомотопии.*

(c) *Всякая точная последовательность $\mathcal{A}$-модулей может быть „продолжена“ до точной последовательности инъективных резольвент $\mathcal{A}$-модулей, которые ее составляют.*

Заметим в заключение, что всякий инъективный $\mathcal{A}$-модуль является *вялым* пучком. Для доказательства этого достаточно написать для каждого открытого в X множества U точную последовательность

$$0 \to \mathcal{A}_U \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{X \setminus U} \to 0$$

(теорема 2.9.3), которая дает точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{X \setminus U}, \mathcal{J}) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{J}) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_U, \mathcal{J}) \to 0.$$

Это и доказывает наше утверждение.

7.2. Производные точного слева ковариантного функтора.

Пусть T — ковариантный, точный слева функтор, определенный на категории левых $\mathcal{A}$-модулей, со значениями в абелевой категории $\mathfrak{K}$. Для любого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{L}$ выберем и зафиксируем инъективную резольвенту $\mathcal{J}^*(\mathcal{L})$ и положим

$$T^n(\mathcal{L}) = H^n[T(\mathcal{J}^*(\mathcal{L}))] = \operatorname{Ker}[T(\mathcal{J}^n(\mathcal{L})) \xrightarrow{d} T(\mathcal{J}^{n+1}(\mathcal{L}))]/\operatorname{Im}[T(\mathcal{J}^{n-1}(\mathcal{L})) \xrightarrow{d} T(\mathcal{J}^n(\mathcal{L}))].$$

Тогда имеют место следующие свойства:

(a) $\mathscr{L} \to T^n(\mathscr{L})$ *является ковариантным функтором со значениями в* $\mathfrak{K}$.

Действительно, всякий гомоморфизм $f: \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ можно продолжить до гомоморфизма $f^*: \mathscr{I}^*(\mathscr{L}) \to \mathscr{I}^*(\mathscr{M})$, причем такое продолжение единственно с точностью до гомотопии. Применяя функтор $H^n(T(\ldots))$, получаем вполне определенный гомоморфизм

$$T^n(f): T^n(\mathscr{L}) \to T^n(\mathscr{M}),$$

который, очевидно, удовлетворяет требованиям, входящим в определение функтора.

(b) *Функтор* T^0 *изоморфен функтору* T.

Действительно, так как T точен слева, то точная последовательность

$$0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{I}^0(\mathscr{L}) \to \mathscr{I}^1(\mathscr{L})$$

приводит к точной последовательности

$$0 \to T(\mathscr{L}) \to T(\mathscr{I}^0(\mathscr{L})) \to T(\mathscr{I}^1(\mathscr{L})),$$

что и дает требуемый результат.

(c) *Со всякой точной последовательностью*

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}'' \to 0$$

связана точная последовательность

$$0 \to T(\mathscr{L}') \to T(\mathscr{L}) \to T(\mathscr{L}'') \xrightarrow{\delta} T^1(\mathscr{L}') \to \ldots .$$

Так как функторы T^n не зависят с точностью до изоморфизма от выбора резольвент $\mathscr{I}^*(\mathscr{L})$, то можно считать, что имеется *точная* последовательность

$$0 \to \mathscr{I}^*(\mathscr{L}') \to \mathscr{I}^*(\mathscr{L}) \to \mathscr{I}^*(\mathscr{L}'') \to 0,$$

совместимая с заданной точной последовательностью [1]). Так как первый член является инъективным, то эта точная последовательность расщепляема [2]), а следовательно, последовательность

$$0 \to T(\mathscr{I}^*(\mathscr{L}')) \to T(\mathscr{I}^*(\mathscr{L})) \to T(\mathscr{I}^*(\mathscr{L}'')) \to 0$$

точна. Отсюда и получаются гомоморфизмы δ.

[1]) Существование инъективных резольвент пучков $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}''$, обладающих указанным свойством, доказывается так же, как аналогичное предложение для модулей (см. гл. V, § 2 книги Картана и Эйленберга). — *Прим. ред.*

[2]) Точная последовательность $0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}'' \to 0$ называется расщепляемой, если существует такой гомоморфизм $\psi: \mathcal{A}'' \to \mathcal{A}$, что $\varphi \circ \psi = 1$. Для расщепляемости такой последовательности достаточно, чтобы пучок $\mathcal{A}'$ был инъективным. Действительно, в этом случае $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}_0$, где $\mathcal{A}_0$ — некоторый пучок (доказательство такое же, как для модулей, см. п. 1.4 гл. I). Очевидно, φ изоморфно отображает $\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{A}''$, что и позволяет определить нужный гомоморфизм ψ. — *Прим. ред.*

(d) *$T^n(\mathscr{L})=0$ для $n\geqslant 1$, если $\mathscr{L}$ инъективен.*

Действительно, в этом случае резольвента $\mathscr{J}^*(\mathscr{L})$ гомотопически тривиальна; следовательно, таким же является и комплекс $T(\mathscr{J}^*(\mathscr{L}))$.

Пример 7.2.1. Возьмем функтор

$$T(\mathscr{L})=\Gamma_\Phi(\mathscr{L}).$$

Тогда производные этого функтора канонически изоморфны функторам $\mathscr{L}\to H^n_\Phi(X;\ \mathscr{L})$. Это следует в силу теорем 4.7.1 — 4.7.3 из того, что резольвента $\mathscr{J}^*(\mathscr{L})$ состоит из вялых пучков.

Пример 7.2.2. Пусть $\mathscr{L}$ — левый $\mathscr{A}$-модуль. Рассмотрим функтор

$$\mathscr{M}\to \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L},\ \mathscr{M}).$$

Производные этого функтора (со значениями в категории пучков абелевых групп над X или в категории $\mathscr{A}$-модулей, если $\mathscr{A}$ коммутативен) будут обозначаться через

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{L},\ \mathscr{M}).$$

Пример 7.2.3. В обозначениях предыдущего примера рассмотрим функтор

$$\mathscr{M}\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{L},\ \mathscr{M}).$$

Его производные функторы (со значениями в категории абелевых групп) обозначаются через

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{L},\ \mathscr{M}).$$

Мы предоставляем читателю интерпретацию свойств (a) — (d) для двух последних примеров.

В заключение заметим, что если взять $\mathscr{L}=\mathscr{A}$, то будем иметь

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A},\ \mathscr{M})=\Gamma(\mathscr{M}).$$

Поэтому для любого левого $\mathscr{A}$-модуля $\mathscr{M}$ имеем

$$H^n(X;\ \mathscr{M})=\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{A},\ \mathscr{M}).$$

7.3. Спектральная последовательность для Ext.

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 7.3.1. *Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ — два левых $\mathscr{A}$-модуля, U — открытое подмножество в X. Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\mid U}(\mathscr{L}\mid U,\ \mathscr{M}\mid U)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_U,\ \mathscr{M}).$$

Всякий гомоморфизм $\mathscr{L}_U \to \mathscr{M}$ определяет некоторый гомоморфизм $\mathscr{L} \mid U \to \mathscr{M} \mid U$. При этом последний гомоморфизм может определяться лишь одним гомоморфизмом $\mathscr{L}_U \to \mathscr{M}$, так как $\mathscr{L}_U(x) = 0$ при $x \notin U$. Пусть, с другой стороны, задан гомоморфизм $f: \mathscr{L} \mid U \to \to \mathscr{M} \mid U$. Определим отображение $\bar{f}$ накрывающего пространства $\mathscr{L}_U$ в накрывающее пространство $\mathscr{M}$, полагая $\bar{f} = f$ над U и $\bar{f} = 0$ над $X \setminus U$. Все сводится к доказательству *непрерывности* отображения $\bar{f}$. Пусть s — сечение из $\mathscr{L}_U(V)$, где V — открытое в X множество. Так как ограничение сечения s на $U \cap V$ является сечением пучка $\mathscr{L} \mid U$, то $\bar{f} \circ s$ непрерывно на $U \cap V$. Но $s = 0$ в $U \setminus (U \cap V)$, а следовательно, и в некотором *открытом* множестве W, удовлетворяющем условию

$$U = W \cup (U \cap V).$$

Значит, $\bar{f} \circ s = 0$ в W. Отсюда следует непрерывность отображения $\bar{f} \circ s$ на всем V.

Лемма 7.3.2. *Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{J}$ — два левых $\mathscr{A}$-модуля. Если пучок $\mathscr{J}$ инъективен, то пучок $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{J})$ является вялым.*

Действительно, сечением этого пучка над открытым множеством U является гомоморфизм $\mathscr{L} \mid U \to \mathscr{J} \mid U$, т. е. по предыдущей лемме гомоморфизм $\mathscr{L}_U \to \mathscr{J}$. Так как $\mathscr{J}$ — инъективный пучок, а $\mathscr{L}_U$ есть $\mathscr{A}$-подмодуль пучка $\mathscr{L}$, то этот гомоморфизм индуцирован некоторым гомоморфизмом $\mathscr{L} \to \mathscr{J}$, что и требовалось доказать.

Теорема 7.3.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{A}$ — пучок колец с базой X, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ — два левых $\mathscr{A}$-модуля. Тогда существует спектральная последовательность, в которой*

$$E_2^{pq} = H^p(X; \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M}))$$

и в которой член E_∞ является биградуированной группой, связанной с градуированной группой $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$, снабженной надлежащей фильтрацией.

Возьмем инъективную резольвенту $\mathscr{J}^*(\mathscr{M})$ и образуем двойной комплекс

$$K = C^*[X; \mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{J}^*(\mathscr{M}))].$$

Для этого двойного комплекса имеем

$${}'E_1^{pq} = H^q[C^p(X; \mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{J}^*(\mathscr{M})))] = C^p[X; \mathscr{H}^q(\mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{J}^*(\mathscr{M})))],$$

так как функтор $C^p(X; \ldots)$ точен. Следовательно,

$${}'E_1^{pq} = C^p(X; \mathscr{E}xt^q(\mathscr{L}, \mathscr{M}))$$

и поэтому

$$'E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{L}, \mathcal{M})).$$

Кроме того,

$$''E_1^{pq} = H^q[C^*(X; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^p(\mathcal{M})))] = H^q(X; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^p(\mathcal{M}))).$$

В силу леммы 7.3.2 эта спектральная последовательность вырождена, так что

$$H^n(K) = ''E_2^{n0} = H^n(\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*(\mathcal{M}))) = \mathrm{Ext}^n(\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Имеем точную последовательность*

$$0 \to H^1(X; \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \to H^0(X; \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})) \to$$
$$\to H^2(X; \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M})) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

Это вытекает из теоремы 4.5.1 гл. I.

7.4. Использование локально свободных резольвент.

Рассмотрим пучок колец $\mathcal{A}$ с базой X и для произвольного целого $n \geqslant 1$ обозначим через $\mathcal{A}^n$ прямое произведение n пучков, идентичных с пучком $\mathcal{A}$. Пучок $\mathcal{A}^n$ можно рассматривать как левый или как правый $\mathcal{A}$-модуль. Произвольный $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{L}$ будем называть *локально свободным*, если для всякого достаточно малого открытого множества $U \subset X$ пучок $\mathcal{L} | U$ как $(\mathcal{A} | U)$-модуль изоморфен пучку $\mathcal{A}^n | U$ (где n может зависеть от U). Наконец, $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{L}$ будем называть модулем *конечного типа*, если существует *гомологическая* резольвента

$$\ldots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L} \to 0,$$

состоящая из локально свободных $\mathcal{A}$-модулей (такая резольвента будет называться *резольвентой конечного типа*). Будем говорить, что $\mathcal{L}$ — модуль *локально конечного типа*, если $(\mathcal{A} | U)$-модуль $\mathcal{L} | U$ для всякого достаточно малого $U \subset X$ имеет конечный тип.

Например, когерентные алгебраические пучки, рассматривавшиеся Ж. П. Серром [Serre J. P., *Ann. Math.*, **61** (1955), 197—278)] [1]), имеют локально конечный тип; таковы же аналитические когерентные пучки теории Картана — Ока.

Отметим сначала следующий результат:

[1]) Русский перевод см. в сб. „Расслоенные пространства", ИЛ, М., 1958, стр. 372—450. — *Прим. ред.*

Лемма 7.4.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — локально свободный левый $\mathscr{A}$-модуль, $\mathscr{M}$ — произвольный левый $\mathscr{A}$-модуль. Тогда для $q \geqslant 1$ имеем*

$$\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M}) = 0.$$

Достаточно доказать, что функтор $\mathscr{M} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$ *точен*. Так как вопрос носит локальный характер, то можно считать, что $\mathscr{L} = \mathscr{A}^p$, но тогда мы получаем функтор $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^p$, что и доказывает лемму.

Заметим, что из этой леммы и теоремы 7.3.3 вытекают канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M}) = H^q(X; \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})),$$

имеющие место для локально свободного $\mathscr{A}$-модуля $\mathscr{L}$.

Теорема 7.4.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — левый $\mathscr{A}$-модуль конечного типа; $\mathscr{L}_*$ — резольвента конечного типа пучка $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ — произвольный левый $\mathscr{A}$-модуль. Тогда имеют место канонические изоморфизмы*

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M}) = \mathscr{H}^n(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_*, \mathscr{M})).$$

Действительно, пусть $\mathscr{M}^*$ — инъективная резольвента пучка $\mathscr{M}$. Рассмотрим пучок двойных комплексов

$$\mathscr{K} = \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_*, \mathscr{M}^*)$$

[его компонентами являются пучки $\mathscr{K}^{pq} = \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_p, \mathscr{M}^q)$]. Рассматривая все в абелевой категории пучков абелевых групп над X, вычислим первую спектральную последовательность для $\mathscr{K}$. Имеем, очевидно,

$$'\mathscr{E}_1^{pq} = \mathscr{H}^q(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_p, \mathscr{M}^*)) = \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_p, \mathscr{M}),$$

так что по лемме 7.4.1 наша спектральная последовательность вырождена. Так как, очевидно,

$$'\mathscr{E}_2^{n0} = \mathscr{H}^n(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_*, \mathscr{M})),$$

то осталось установить, что имеют место канонические изоморфизмы

$$\mathscr{H}^n(\mathscr{K}) = \mathscr{E}xt^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M}).$$

Для этого воспользуемся второй спектральной последовательностью. Имеем

$$''\mathscr{E}_1^{pq} = \mathscr{H}^q(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_*, \mathscr{M}^p)).$$

Так как $\mathscr{M}^p$ — инъективный пучок, а $\mathscr{L}_*$ — гомологическая резольвента пучка $\mathscr{L}$, то

$$''\mathscr{E}_1^{pq} = 0 \quad \text{при} \quad q \geqslant 1, \quad ''\mathscr{E}_1^{p0} = \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M}^p).$$

Это и дает требуемый результат.

Следствие. *Пусть $\mathscr{L}$ — $\mathscr{A}$-модуль локально конечного типа, $\mathscr{M}$ — произвольный $\mathscr{A}$-модуль. Тогда для любого $x \in X$ имеет место канонический изоморфизм*

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})(x) = \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}(x)}(\mathscr{L}(x), \mathscr{M}(x)).$$

Прежде всего, перейдя к достаточно малой окрестности, можно свести все к случаю, когда $\mathscr{L}$ имеет конечный тип. При этом предположении ясно, что слои пучка $\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}, \mathscr{M})$ являются группами когомологий комплексов

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_*, \mathscr{M})(x)$$

(в обозначениях предыдущей теоремы). Но так как $\mathscr{L}_*$ состоит из локально свободных пучков, то эти комплексы канонически изоморфны комплексам

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(x)}(\mathscr{L}_*(x), \mathscr{M}(x)).$$

Поскольку $\mathscr{L}_*(x)$ — свободная резольвента $\mathscr{A}(x)$-модуля $\mathscr{L}(x)$, то отсюда следует требуемый результат.

Указанное следствие может быть доказано в несколько иных предположениях, а именно когда $\mathscr{L}$ — „когерентный" модуль над „когерентным" пучком нётеровых колец. См. по этому поводу работу А. Гротендика [Grothendieck A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, **9** (1957), 119—211].

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАНДАРТНЫЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

1. Пять правил функторного исчисления.

В § 1 гл. I были определены для любых двух категорий $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ понятия *ковариантного функтора* $F : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ и *гомоморфизма функторов* $\theta : F \to G$ $(F, G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}'')$. Была определена также *композиция* $G \circ F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}''$ произвольных функторов $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ и $G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$. Кроме того, если заданы три ковариантных функтора F, G, $H : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ и два гомоморфизма функторов $\varphi : F \to G$ и $\psi : G \to H$, то можно определить *композицию* $\psi \circ \varphi : F \to H$ с помощью формулы

$$\psi \circ \varphi(X) = \psi(X) \circ \varphi(X) \qquad (X \in \mathfrak{K}').$$

Рассмотрим теперь два функтора F, $G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$ и гомоморфизм $\theta : F \to G$. Если имеются два других ковариантных функтора $U : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}''$ и $V : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{K}'$, то можно получить новый гомоморфизм функторов

$$U * \theta * V : U \circ F \circ V \to U \circ G \circ V,$$

определяемый формулой

$$U * \theta * V(X) = U(\theta(V(X))) \qquad (X \in \mathfrak{M}').$$

Если U (соответственно V) является тождественным функтором, то будем писать просто $\theta * V$ (соответственно $U * \theta$). Между операцией $*$, которую мы только что определили, и двумя законами композиции, определенными выше, имеются простые соотношения, которые можно сформулировать в виде пяти следующих *правил*. Мы ограничимся их формулировкой, так как доказательства тривиальны.

(I) $$(U \circ V) * \theta = U * (V * \theta);$$

эта формула имеет место, если заданы функторы F, $G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$, гомоморфизм $\theta : F \to G$ и два функтора $V : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}'$ и $U : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}''$.

(II) $$\theta * (U \circ V) = (\theta * U) * V;$$

эта формула, так же как и предыдущая, справедлива всегда, когда имеет смысл.

(III) $$(U * \theta) * V = U * (\theta * V) = U * \theta * V;$$

эта формула справедлива, когда имеет смысл ее последний член.

(IV) $$U * (\theta' \circ \theta'') * V = (U * \theta' * V) \circ (U * \theta'' * V);$$

эта формула справедлива, если имеются функторы F, G, $H : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}''$, гомоморфизмы $\theta' : G \to H$, $\theta'' : F \to G$ и функторы $U : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}''$, $V : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{M}'$.

(V) $$(\psi * G) \circ (U * \varphi) = (V * \varphi) \circ (\psi * F);$$

эта формула имеет место, если заданы функторы

$$F, G : \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}'' \text{ и } U, V : \mathfrak{K}'' \to \mathfrak{M}$$

и гомоморфизмы

$$\varphi : F \to G, \ \psi : U \to V.$$

2. Полусимплициальные объекты.

Обозначим через Δ категорию, объектами которой являются стандартные симплексы Δ_n ($n = 0, 1, \ldots$) (см. гл. I, § 3), а $\mathrm{Hom}(\Delta_p, \Delta_q)$ состоит из множества неубывающих отображений множества Δ_p в Δ_q, причем композиция гомоморфизмов в Δ определена как композиция отображений.

Пусть задана произвольная категория $\mathfrak{K}$. *Полусимплициальным объектом* в $\mathfrak{K}$, по определению, будет называться ковариантный функтор

$$F^* : \Delta \to \mathfrak{K}.$$

Положим $F^n = F(\Delta_n) \in \mathfrak{K}$ и будем записывать F^* в виде $(F^n)_{n \geqslant 0}$. Заметим, что это определение специально приспособлено для когомологий. Дуальную точку зрения мы получили бы при замене $\mathfrak{K}$ на дуальную категорию.

Пусть $n \geqslant 0$ — целое число. В множестве $\mathrm{Hom}(\Delta_n, \Delta_{n+1})$ имеются отображения [1])

$$d_n^i : \Delta_n \to \Delta_{n+1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n+1),$$

которые определяют в Δ_{n+1} сингулярные симплексы вида $(0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n+1)$. Далее, в $\mathrm{Hom}(\Delta_{n+1}, \Delta_n)$ имеются отображения

$$s_n^i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \qquad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

которые определяют в Δ_n сингулярные симплексы $(0, \ldots, i-1, i, i, i+1, \ldots, n)$. Тривиально проверяется, что всякий гомоморфизм $\Delta_p \to \Delta_q$ в категории Δ является композицией гомоморфизмов типа d_n^i

[1]) Имеем $d_n^i = F_{n+1}^i$ в обозначениях гл. I, п. 3.5.

и s^i_n. Можно показать также, что все соотношения между гомоморфизмами в категории Δ являются формальными следствиями следующих соотношений:

(a) $$d^j_{n+1} \circ d^i_n = d^i_{n+1} \circ d^{j-1}_n \qquad (i < j),$$

(b) $$s^j_n \circ s^i_{n+1} = s^i_n \circ s^{j+1}_{n+1} \qquad (i \leqslant j),$$

(c) $$s^j_{n+1} \circ d^i_{n+1} = d^i_n \circ s^{j-1}_n \qquad (i < j),$$

(d) $$s^i_n \circ d^i_n = s^i_n \circ d^{i+1}_n = 1,$$

(e) $$s^j_{n+1} \circ d^i_{n+1} = d^{i-1}_n \circ s^j_n \qquad (j+1 < i).$$

Отсюда вытекает, что для задания в категории $\mathfrak{K}$ полусимплициального объекта F^* необходимо и достаточно задать объекты F^n категории $\mathfrak{K}$ и гомоморфизмы

$$F^*\left(d^i_n\right) : F^n \to F^{n+1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n+1),$$
$$F^*\left(s^i_n\right) : F^{n+1} \to F^n \qquad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

удовлетворяющие указанным выше соотношениям. Эти гомоморфизмы называются *операторами граней и вырождений* объекта F^*. Практически мы будем писать d^i_n и s^i_n вместо $F^*\left(d^i_n\right)$, $F^*\left(s^i_n\right)$.

3. Основная конструкция.

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторая категория. Обозначим через $CS^*_+(\mathfrak{K})$ категорию полусимплициальных объектов в $\mathfrak{K}$. В этом пункте будут построены ковариантные функторы

$$F^* : \mathfrak{K} \to CS^*_+(\mathfrak{K}).$$

Для построения F^* достаточно построить функторы $F^n : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ $(n \geqslant 0)$ и гомоморфизмы $d^i_n : F^n \to F^{n+1}$, $s^i_n : F^{n+1} \to F^n$, удовлетворяющие соотношениям (a) — (e) из п. 2.

Будем рассуждать следующим образом. Исходя из ковариантного функтора

$$C : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K},$$

определим прежде всего функторы $C^n : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, считая C^0 тождественным функтором, а $C^{n+1} = C \circ C^n$, и положим

$$F^n = C^{n+1} \qquad (n \geqslant 0).$$

Допустим теперь, что нам даны два гомоморфизма функторов

$$k : C^0 \to C^1, \;\; p : C^2 \to C^1.$$

Определим гомоморфизмы

$$d_n^i : F^n = C^{n+1} \to C^{n+2} = F^{n+1},$$
$$s_n^i : F^{n+1} = C^{n+2} \to C^{n+1} = F^n$$

с помощью следующих формул:

$$\boxed{d_n^i = C^i * k * C^{n-i+1}, \quad s_n^i = C^i * p * C^{n-i}.}$$

Разумеется, соотношения (a) — (e) не будут выполняться, если не наложить дополнительных ограничений на k и p. Однако соотношение (a), которое в случае, когда $\mathfrak{K}$ — абелева категория, а F — аддитивный функтор, достаточно для определения дифференциала в $F^* = (F^n)_{n \geqslant 0}$, *всегда выполняется.* Действительно, оно записывается в виде (считая $j = i + r + 1$, $r \geqslant 0$)

$$\left(C^{i+r+1} * k * C^{n-i-r+1}\right) \circ \left(C^i * k * C^{n-i+1}\right) = \\ = \left(C^i * k * C^{n-i+2}\right) \circ \left(C^{i+r} * k * C^{n-i-r+1}\right).$$

По правилу (IV) из п. 1 оно сводится к соотношению

$$(C^{r+1} * k) \circ (k * C^r) = (k * C^{r+1}) \circ (C^r * k),$$

которое следует из правила (V) п. 1.

Чтобы выполнялись условия (b) — (e), достаточно подчинить k и p следующим условиям:

(A) $$p \circ (C * k) = p \circ (k * C) = 1,$$

(B) $$p \circ (C * p) = p \circ (p * C).$$

Докажем, например, соотношение (b). Полагая $j = i + r$, где $r \geqslant 0$, перепишем это соотношение в виде

$$(C^{i+r} * p * C^{n-i-r}) \circ (C^i * p * C^{n-i+1}) = \\ = (C^i * p * C^{n-i}) \circ (C^{i+r+1} * p * C^{n-i-r}).$$

В силу правила (IV) это равенство можно сократить слева на C^i и справа — на C^{n-i-r}, после чего оно сведется к соотношению

$$(C^r * p) \circ (p * C^{r+1}) = (p * C^r) \circ (C^{r+1} * p).$$

Это соотношение совпадает с (B) при $r = 0$, а для $r \geqslant 1$ оно сразу же следует из правила (V).

Мы предоставляем читателю доказать остальные соотношения.

4. Приложение к пучкам.

Конструкцию п. 3 можно следующим образом применить к теории пучков. В качестве $\mathfrak{K}$ возьмем *категорию пучков множеств над заданным пространством* X, в качестве C возьмем функтор

$$C(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}),$$

сопоставляющий пучку $\mathcal{A}$ пучок ростков всех (не обязательно непрерывных) сечений пучка $\mathcal{A}$. В обозначениях § 6 гл. II будем иметь тогда

$$F^n(\mathcal{A}) = \mathcal{F}^n(X;\ \mathcal{A}).$$

Для построения гомоморфизмов функторов k и p нужно *канонически*, т. е. функторно сопоставить каждому пучку $\mathcal{A}$ с базой X гомоморфизмы пучков

$$k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}),$$

$$p(\mathcal{A}) : \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})) \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}).$$

В качестве $k(\mathcal{A})$ следует, очевидно, взять каноническое вложение. Чтобы определить $p(\mathcal{A})$, достаточно „естественным образом“ сопоставить всякому непрерывному сечению пучка

$$\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}))$$

над открытым в X множеством U непрерывное сечение пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$ над U. Другими словами, достаточно произвольному (не обязательно непрерывному) сечению пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$ над U, например, сечению $x \to s(x)$, сопоставить некоторое (не обязательно непрерывное) сечение $x \to \bar{s}(x)$ пучка $\mathcal{A}$ над U. Для любого $x \in U$ элемент $s(x)$ из слоя над x в $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$ является ростком не обязательно непрерывного сечения пучка $\mathcal{A}$ в точке x, и поэтому его можно задать отображением

$$x_1 \to s(x,\ x_1) \in \mathcal{A}(x_1),$$

определенным для x_1, достаточно близких к x. Положим теперь

$$\bar{s}(x) = s(x,\ x),$$

т. е. равным *значению* ростка сечения $s(x)$ пучка $\mathcal{A}$ в точке x.

Надо проверить теперь условия (A) и (B) предыдущего пункта и прежде всего соотношение

$$\text{(A)} \qquad p \circ (C * k) = p \circ (k * C) = 1,$$

которое означает, что

$$p(\mathcal{A}) \circ C(k(\mathcal{A})) = p(\mathcal{A}) \circ k(C(\mathcal{A})) = 1$$

для любого пучка $\mathcal{A}$ над X.

Так как два первых члена этого равенства являются гомоморфизмами пучков

$$C(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}) = C(\mathcal{A}),$$

то остается выяснить, как они действуют на сечения пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$. Итак, пусть s — непрерывное сечение пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$ над открытым множеством U, представленное не обязательно непрерывным сечением $\bar{s}$ пучка $\mathcal{A}$ над U. Образом сечения s при гомоморфизме $k(C(\mathcal{A}))$ является непрерывное сечение пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}))$, полученное из s с помощью канонического вложения

$$\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})).$$

Этот образ представляется некоторым не обязательно непрерывным сечением пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$, а именно сечением s (которое в действительности непрерывно). Отсюда вытекает, что образ сечения s при $p(\mathcal{A}) \circ k(C(\mathcal{A}))$ можно представить не обязательно непрерывным сечением пучка $\mathcal{A}$, которое получается, если каждому $x \in U$ сопоставить *значение* в точке x ростка $s(x)$ сечения пучка $\mathcal{A}$. Это значение есть не что иное, как $\bar{s}(x)$, и, следовательно, образом сечения s при $p(\mathcal{A}) \circ k(C(\mathcal{A}))$ является s. Этим доказано, что $p \circ (k * C)$ является тождественным гомоморфизмом. Рассмотрим теперь $p \circ (C * k)$. Прежде всего нужно найти сечение пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}))$, получающееся из s с помощью гомоморфизма $C(k(\mathcal{A}))$, который является результатом применения функтора C к гомоморфизму пучков

$$k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A}).$$

Обозначим через $k_x(\mathcal{A})$ отображение слоя над x в пучке $\mathcal{A}$ в слой над x в пучке $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$, индуцированное отображением $k(\mathcal{A})$. Если непрерывное сечение s пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$ представляется не обязательно непрерывным сечением $\bar{s}$ пучка $\mathcal{A}$, то образ сечения s при $C(k(\mathcal{A}))$ будет представлен вообще говоря разрывным сечением

$$x \to k_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))$$

пучка $\mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})$. Если теперь к полученному сечению применить $p(\mathcal{A})$, то получим вообще говоря разрывное сечение пучка $\mathcal{A}$, задаваемое формулой

$$x \to h_x(\mathcal{A})\,[k_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))],$$

где

$$h_x(\mathcal{A}) : \mathcal{C}^0(X;\ \mathcal{A})(x) \to \mathcal{A}(x)$$

есть отображение, которое сопоставляет каждому ростку сечения (непрерывного или нет) пучка $\mathcal{A}$ в точке x его значение в x. Чтобы закончить доказательство соотношения (A), осталось доказать, что

$$h_x(\mathcal{A}) \circ k_x(\mathcal{A}) = 1.$$

Но это тривиально, так как если элемент s из $\mathcal{A}(x)$ представить ростком непрерывного сечения в точке x, то значение этого ростка в x и есть s.

Установим теперь равенство

$$\text{(B)} \qquad p \circ (C * p) = p \circ (p * C).$$

На этот раз речь идет о гомоморфизмах функторов $C^3 \to C$, т. е. о гомоморфизмах пучков

$$\mathcal{F}^2(X; \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^0(X; \mathcal{A})$$

для любого пучка $\mathcal{A}$. Нам нужно выяснить, как действуют эти гомоморфизмы на непрерывное сечение s пучка $\mathcal{F}^2(X; \mathcal{A})$ над открытым множеством U, т. е. на вообще говоря разрывное сечение $\bar{s}$ пучка

$$\mathcal{F}^1(X; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}))$$

над U. Результат при этом должен быть не обязательно непрерывным сечением пучка $\mathcal{A}$ над U.

Для каждого $x_0 \in U$ элемент $\bar{s}(x_0)$ является ростком не обязательно непрерывного сечения пучка $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$ в точке x_0, т. е. его можно представить вообще говоря разрывным сечением

$$x_1 \to \bar{s}(x_0, x_1) \in \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})(x_1)$$

пучка $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$, определенным в окрестности точки x_0 или даже, если угодно, на всем U. Элемент $\bar{s}(x_0, x_1)$ в свою очередь является ростком вообще говоря разрывного сечения пучка $\mathcal{A}$ в точке x_1, следовательно, представляется отображением

$$x_2 \to \bar{s}(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{A}(x_2),$$

определенным в окрестности точки x_1 или даже во всем U.

Выясним теперь, как действует $p \circ (C * p)$, т. е. гомоморфизм пучков $p(\mathcal{A}) \circ C[p(\mathcal{A})]$, на сечение s. Положим для краткости

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) = C(\mathcal{A}), \ \mathcal{A}^1 = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})) = C^2(\mathcal{A}) \text{ и т. д.}$$

Гомоморфизм пучков

$$p(\mathcal{A}) : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^0$$

индуцирует для каждого $x \in X$ отображение

$$p_x(\mathcal{A}) : \mathcal{A}^1(x) \to \mathcal{A}^0(x)$$

соответствующих слоев. Так как $C(p(\mathcal{A}))$ есть гомоморфизм пучков $C(\mathcal{A}^1) \to C(\mathcal{A}^0)$, полученный применением функтора C к $p(\mathcal{A})$, то

ясно, что сечение пучка $C(\mathcal{A}^0)=\mathcal{A}^1$, являющееся образом сечения s при гомоморфизме $C(p(\mathcal{A}))$, будет представлено вообще говоря разрывным сечением

$$x \to p_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))$$

пучка $\mathcal{A}^0$. Далее, элемент $\bar{s}(x)$ из $\mathcal{A}^1(x)$ представлен в $\mathcal{A}$ функцией $\bar{s}(x, x_1, x_2)$ от переменных $x_1, x_2 \in U$. По определению гомоморфизма p отсюда следует, что $p_x(\mathcal{A})(\bar{s}(x))$ является ростком не обязательно непрерывного сечения пучка $\mathcal{A}$ в точке x, представленного функцией $x_1 \to \bar{s}(x, x_1, x_1)$. Применяя p к полученному результату, видим, что образ сечения s при гомоморфизме $p \circ (C * p)$ есть не что иное, как вообще говоря разрывное сечение

$$x \to \bar{s}(x, x, x)$$

пучка $\mathcal{A}$ над U.

Выясним, наконец, как действует $p \circ (p * C)$ на s, т. е. найдем образ сечения s при гомоморфизме пучков $p(\mathcal{A}) \circ p(C(\mathcal{A}))$. Прежде всего нужно найти образ сечения s при $p(C(\mathcal{A}))$, т. е. применить p к s, рассматриваемому как непрерывное сечение пучка $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{C}^0(X; C(\mathcal{A})))$. Получается, очевидно, не обязательно непрерывное сечение пучка $C(\mathcal{A})=\mathcal{A}^0$, представленное отображением $x \to \to \bar{s}(x, x) \in \mathcal{A}^0(x)$. К полученному сечению следует еще применить $p(\mathcal{A})$, но так как $\bar{s}(x, x)$ есть росток, определенный в точке x не обязательно непрерывным сечением

$$x_2 \to \bar{s}(x, x, x_2)$$

пучка $\mathcal{A}$ над U, то ясно, что получим вообще говоря разрывное сечение

$$x \to \bar{s}(x, x, x)$$

пучка $\mathcal{A}$ над U. Сравнивая этот результат с формулой, полученной для $p \circ (C * p)$, убеждаемся в том, что тождество (B) справедливо.

После того как доказаны (A) и (B), можно применять метод предыдущего пункта. Этот метод приводит к *полусимплициальной структуре для функтора*

$$\mathcal{F}^*(X; \mathcal{A}) = (\mathcal{F}^n(X; \mathcal{A}))_{n \geqslant 0}.$$

Мы предоставляем читателю убедиться в том, что она совпадает со структурой, определенной явным образом в гл. II, § 6.

Хотелось бы улучшить доказательства соотношений (A) и (B), изложенные выше, неудовлетворительность которых очевидна. Положение было бы вполне прояснено, если бы можно было a priori доказать следующее предположение: для всякого целого $n \geqslant 0$ *суще-*

ствует единственный гомоморфизм функторов $\mathcal{F}^n(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^0(X;\ \mathcal{A})$. Можно даже предположить, что *единственными гомоморфизмами функторов* $\mathcal{F}^p(X;\ \mathcal{A}) \to \mathcal{F}^q(X;\ \mathcal{A})$ *являются гомоморфизмы, получающиеся из неубывающих отображений* $\Delta_p \to \Delta_q$ *и из полусимплициальной структуры функтора* $\mathcal{A} \to \mathcal{F}^*(X;\ \mathcal{A})$.

5. Полусимплициальные резольвенты.

В категории пучков *множеств* с базой X не возникает вопроса о том, является ли $\mathcal{F}^*(X;\ \mathcal{A})$ *резольвентой* пучка $\mathcal{A}$. Перейдем теперь к категории пучков *абелевых групп* с базой X и покажем, что в этом случае дело обстоит именно таким образом.

Для этого вернемся к предположениям п. 3. Пусть имеется ковариантный функтор

$$C : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K},$$

где $\mathfrak{K}$ — произвольная категория, и гомоморфизмы функторов

$$k : C^0 \to C^1, \quad p : C^2 \to C^1,$$

удовлетворяющие условиям (A) и (B). В дальнейшем нам нужен будет только гомоморфизм k, а гомоморфизм p не будет принимать участия в последующих вычислениях. Рассмотрим теперь ковариантный функтор

$$T : \mathfrak{K} \to \mathfrak{A}$$

со значениями в некоторой *абелевой* категории $\mathfrak{A}$. Положим, как и в п. 3,

$$F^0 = C, \ \ldots, \ F^{n+1} = C \circ F^n, \ \ldots .$$

Как мы уже видели, градуированный функтор $F^* = (F^n)_{n \geqslant 0}$ снабжен операторами

$$d_n^i = C^i * k * C^{n-i+1}.$$

Поэтому, полагая

$$T^n = T \circ F^n, \quad T^* = (T^n)_{n \geqslant 0},$$

мы получаем операторы граней $T * d_n^i$ для градуированного функтора T^*. Так как категория $\mathfrak{A}$ *абелева*, то можно определить *дифференциал*

$$d_n : T^n \to T^{n+1},$$

задаваемый формулой

$$d_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, T * d_n^i.$$

Теперь докажем следующее утверждение: *пусть задан гомоморфизм функторов*

$$h : T \circ C \to T,$$

такой, что $h \circ (T * k)$ — *тождественное преобразование; тогда для любого* $X \in \mathfrak{K}$ *последовательность объектов и гомоморфизмов*

$$0 \to T(X) \xrightarrow{T*k} T^0(X) \xrightarrow{d_0} T^1(X) \xrightarrow{d_1} T^2(X) \to \dots$$

точна в категории $\mathfrak{A}$.

Так как $T * k$ допускает обратный слева, то ясно, что $T * k$ — мономорфизм. Положим $T^{-1} = T$, $d_{-1} = T * k$. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно построить гомоморфизмы функторов

$$h_n : T^{n+1} \to T^n \qquad (n \geqslant -1),$$

удовлетворяющие соотношениям

$$h_n \circ d_n + d_{n-1} \circ h_{n-1} = 1$$

для $n \geqslant 0$. Докажем, что для этой цели подходят гомоморфизмы

$$h_n = h * C^{n+1}.$$

Действительно, левая часть предыдущего равенства переписывается в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i h_n \circ (T * d_n^i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (T * d_{n-1}^i) \circ h_{n-1} =$$
$$= h_n \circ (T * d_n^0) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[(T * d_{n-1}^i) \circ h_{n-1} - h_n \circ (T * d_n^{i+1})\right],$$

и, следовательно, достаточно доказать равенства

$$h_n \circ (T * d_n^0) = 1 \qquad (n \geqslant 0),$$
$$(T * d_{n-1}^i) \circ h_{n-1} = h_n \circ (T * d_n^{i+1}) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Но мы имеем

$$h_n \circ (T * d_n^0) = (h * C^{n+1}) \circ (T * k * C^{n+1}) = [h \circ (T * k)] * C^{n+1},$$

откуда получается первое соотношение. Что касается второго соотношения, то его можно записать в виде

$$[T * (C^i * k * C^{n-i})] \circ (h * C^n) = (h * C^{n+1}) \circ [T * (C^{i+1} * k * C^{n-i})].$$

При помощи правил (I) — (IV) из п. 1 это соотношение можно свести к равенству

$$\left(T^{i-1} * k\right) \circ \left(h * C^{i}\right) = \left(h * C^{i+1}\right) \circ \left(T^{i} * k\right),$$

которое сразу же следует из правила (V) п. 1.

Вернемся теперь к теории пучков и возьмем в качестве $\mathfrak{K}$ категорию пучков *абелевых групп* с базой X, в качестве C — функтор

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}^{0}(X; \mathcal{A}),$$

а в качестве k — канонический гомоморфизм $\mathcal{A} \to \mathcal{C}^{0}(X; \mathcal{A})$, которым мы уже пользовались в предыдущем пункте. Полученный выше результат можно применить для доказательства того, что $\mathcal{F}^{*}(X; \mathcal{A})$ является *резольвентой* пучка $\mathcal{A}$. Достаточно, очевидно, взять в качестве T любой функтор вида

$$T_{x} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}(x),$$

принимающий значения в категории абелевых групп. Таким образом, все сводится к построению для любого $x \in X$ гомоморфизма функторов

$$h_{x} : T_{x} \circ C \to T_{x},$$

для которого $h_{x} \circ [T_{x} * k]$ — тождественное преобразование. Так как $T_{x} * k$ есть не что иное, как вложение

$$k_{x}(\mathcal{A}) : \mathcal{A}(x) \to \mathcal{C}^{0}(X; \mathcal{A})(x),$$

то достаточно в силу соотношения $h_{x}(\mathcal{A}) \circ k_{x}(\mathcal{A}) = 1$, доказанного в предыдущем пункте, определить h_{x} условием, чтобы оно индуцировало отображение

$$h_{x}(\mathcal{A}) : \mathcal{C}^{0}(X; \mathcal{A})(x) \to \mathcal{A}(x)$$

предыдущего пункта.

Описанные методы применимы не только в теории пучков. Например, они дают новый способ для построения *стандартных комплексов* теории ассоциативных алгебр (см. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960, стр. 218). Для этого нужно исходить из алгебры A над коммутативным кольцом Λ, в качестве $\mathfrak{K}$ взять категорию A-бимодулей, а в качестве C — функтор

$$C(X) = A \underset{\Lambda}{\otimes} S.$$

Нужно встать на гомологическую точку зрения (что сводится к „обращению стрелок“ в предыдущих конструкциях), так что будем иметь формулу

$$F_{n}(X) = A \underset{\Lambda}{\otimes} \dots \underset{\Lambda}{\otimes} A \underset{\Lambda}{\otimes} X,$$

содержащую $n+1$ множителей, равных A. Гомоморфизмы k и p, т. е.

$$k(X): A \underset{\Lambda}{\otimes} X \to X, \quad p(X): A \underset{\Lambda}{\otimes} X \to A \underset{\Lambda}{\otimes} A \underset{\Lambda}{\otimes} X,$$

определяются с помощью отображений $a \otimes x \to ax$ и $a \otimes x \to a \otimes 1 \otimes x$. Мы предоставляем читателю проверить, что граничный оператор в комплексе $F_*(X)$ задается обычной формулой. Наконец, для доказательства того, что $F_*(X)$ является резольвентой модуля X, можно применить метод, развитый выше, взяв в качестве $\mathfrak{A}$ категорию Λ-модулей, в качестве T — тождественный функтор $X \to X$ из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{A}$ и в качестве h — гомоморфизм, определенный формулой

$$h(X): x \to 1 \otimes x.$$

Напомним, что гомологическая теория ассоциативных алгебр включает в себя, в частности, теорию функторов Ext и Tor, гомологии в группах, гомологии алгебр Ли. Следовательно, эти теории можно излагать с помощью *симплициальных методов*. Так как эти методы применимы также и к когомологиям — в смысле Чеха или Гротендика — со значениями в пучках, а также к теории сингулярных гомологий и к гомотопической теории, то кажется оправданным рассматривать их как один из наиболее важных аппаратов, которыми располагает в настоящее время топология.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ